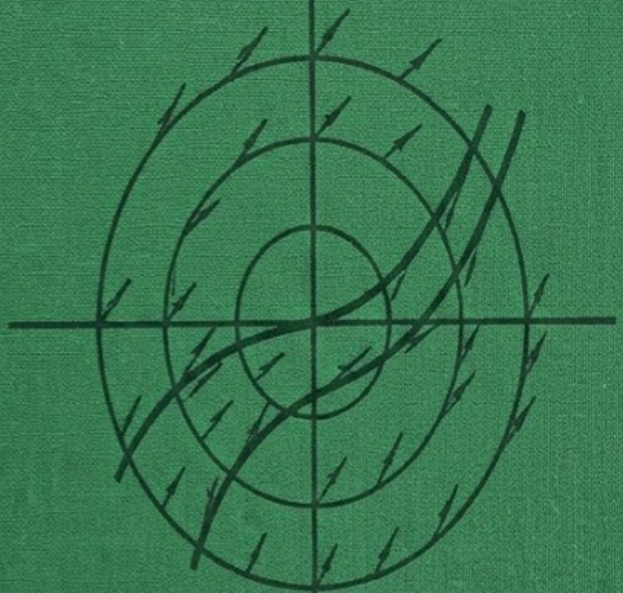
И. М. САРЕНКОВ
М. З. МАЛЛЕР

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И. М. УВАРЕНКОВ
М. З. МАЛЛЕР



КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И. М. УВАРЕНКОВ
М. З. МАЛЛЕР

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ II

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ПРОСВЕЩЕНИЯ
СССР В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО
ПОСОБИЯ ДЛЯ ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1976

517.2
У18

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой второй том написанного нами курса математического анализа для студентов физико-математических факультетов педвузов. Она написана в строгом соответствии с новой программой по курсу математического анализа для пединститутов.

При работе над этой книгой мы исходили из той же основной установки, что и при написании первого тома: не жертвуя строгостью изложения, сделать его по возможности доступным.

Главы I, VII, VIII, IX, XI, XII, XIII, XIV и §18—23 главы III написаны И. М. Уваренковым, главы II, IV, V, VI, X, XV, XVI, XVII и § 16, 17 главы III написаны М. З. Маллером. Параграф 55 написан нами совместно.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. П. П. Коровкину за детальный просмотр рукописи, ценные указания и советы, а также проф. Н. А. Давыдову за сделанные им полезные замечания.

Авторы

г. Смоленск, 1975 г.

У18 **Уваренков И. М. и Маллер М. З.**
Курс математического анализа. Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Т. II. М., «Просвещение», 1976.

479 с с ил.

В книге изложены вопросы: теория рядов, дифференциальное исчисление функций многих переменных, кратные и криволинейные интегралы и др., составляющие материал второго года обучения. Пособие содержит большое количество упражнений вместе с образцами их решения.

$\text{У}\frac{60602-552}{103(03)-76}$ 33-76 517.2

© Издательство «Просвещение», 1976 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 2

Глава I. **Числовые ряды** 3

§ 1. Понятие числового ряда и его суммы . . . . . —
§ 2. Простейшие свойства сходящихся рядов 8
§ 3. Остаток ряда 11
§ 4. Необходимый признак сходимости ряда 13
§ 5. Критерий Коши 15
§ 6. Знакопостоянные ряды 17
§ 7. Ряды с произвольными членами. Абсолютная и неабсолютная сходимость рядов 31
§ 8. О перестановке членов в рядах 39
§ 9. Умножение абсолютно сходящихся рядов 42

Глава II. **Функциональные последовательности и ряды** 46

§ 10. Понятие функциональной последовательности и ее сходимости —
§ 11. Равномерная сходимость функциональной последовательности 48
§ 12. Некоторые свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей 51
§ 13. Понятие функционального ряда и его области сходимости. 55
§ 14. Равномерная сходимость функционального ряда 57
§ 15. Некоторые свойства равномерно сходящихся рядов 60

Глава III. **Степенные ряды. Ряды Тейлора** 65

§ 16. Понятие степенного ряда. Интервал сходимости . . . . . —
§ 17. Некоторые свойства степенных рядов 70
§ 18. Разложение функций в степенные ряды. Единственность разложения 74
§ 19. Ряды Тейлора 75
§ 20. Разложение некоторых функций в ряды Тейлора 79
§ 21. Биномиальный ряд и вычисление значений радикалов 82
§ 22. Некоторые приемы косвенного разложения функции в степенные ряды. Вычисление числа π 88
§ 23. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов 90

Глава IV. **Ряды Фурье** 94

§ 24. Тригонометрические ряды . . . . . —
§ 25. Ортогональные системы функций 96
§ 26. Ряд Фурье 98
§ 27. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя 102
§ 28. Сходимость в среднем 106
§ 29. Полнота и замкнутость ортогональных систем 108
§ 30. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье 111

§ 31. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье общего вида 124
§ 32. Разложение функций на сегменте $[0, l]$ 126

Глава V. **Точечные множества в n-мерном пространстве** 129

§ 33. Простейшие двумерные и трехмерные точечные множества . . . —
§ 34. n-мерные точечные множества. Евклидово n-мерное пространство 130
§ 35. Предельные точки n-мерного точечного множества. Открытые и замкнутые множества. Область 133
§ 36. Принцип стягивающихся (n-мерных) кубов 136
§ 37. Сходящиеся последовательности точек n-мерного пространства. 137

Глава VI. **Понятие функции нескольких переменных. Предел функции и непрерывность** 140

§ 38. Функции нескольких переменных . . . . . —
§ 39. Предел функции в точке 143
§ 40. Непрерывные функции нескольких переменных 146
§ 41. Свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах. 150

Глава VII. **Дифференцирование функций нескольких переменных** 154

§ 42. Частные производные . . . . . —
§ 43. Полный дифференциал 159
§ 44. Касательная плоскость. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных 172
§ 45. Производная сложной функции 174
§ 46. Инвариантность формы полного дифференциала 181
§ 47. Частные производные высших порядков 183
§ 48. Дифференциалы высших порядков 190
§ 49. Формула Тейлора для функции нескольких переменных . . . 195

Глава VIII. **Неявные функции. Производная по направлению** . . . 201

§ 50. Неявные функции от одной переменной . . . . . —
§ 51. Неявные функции от n переменных 207
§ 52. Неявные функции, определяемые системой уравнений 208
§ 53. Дифференцирование неявных функций 212
§ 54. Некоторые геометрические приложения 223
§ 55. Производная по заданному направлению. Градиент 227

Глава IX. **Экстремумы функций нескольких переменных** 233

§ 56. Понятие максимума и минимума функций нескольких переменных . . . . . —
§ 57. Необходимые условия существования экстремума 235
§ 58. Достаточные условия существования экстремума 238
§ 59. Наибольшее и наименьшее значения функций двух переменных 244
§ 60. Условный экстремум 248

Глава X. **Кратные интегралы** 258

§ 61. Квадрируемые фигуры . . . . . —
§ 62. Кубируемые тела 265
§ 63. Понятие двойного интеграла 267
§ 64. Свойства двойного интеграла 271
§ 65. Интегрируемость непрерывной функции 273
§ 66. Вычисление двойного интеграла 275
§ 67. Замена переменных в двойном интеграле 287
§ 68. Некоторые приложения двойных интегралов 294
§ 69. Понятие тройного интеграла 303

Глава XI. **Криволинейные интегралы** 314

§ 70. Задача о работе плоского силового поля . . . . . —
§ 71. Понятие криволинейного интеграла (по координатам) 316
§ 72. Существование криволинейного интеграла 319
§ 73. Основные свойства криволинейного интеграла 322
§ 74. Вычисление криволинейных интегралов (продолжение) . . . 326
§ 75. Формула Грина 334
§ 76. Вычисление площадей фигур с помощью криволинейного интеграла 339
§ 77. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования 342
§ 78. Признак полного дифференциала 348
§ 79. Восстановление функции по ее полному дифференциалу . . . 352
§ 80. Криволинейный интеграл по длине дуги 358

Глава XII. **Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения** 364

§ 81. Основные понятия . . . . . —
§ 82. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка 368
§ 83. Образование дифференциального уравнения исключением произвольной постоянной 371
§ 84. Структура общего решения. Начальные условия 372
§ 85. Уравнения с разделяющимися переменными 374
§ 86. Однородные уравнения 384
§ 87. Линейные уравнения 392
§ 88. Уравнения в полных дифференциалах 398
§ 89. Интегрирующий множитель 401

Глава XIII. **Теорема существования решения дифференциального уравнения первого порядка. Особые решения** 405

§ 90. Теорема Коши . . . . . —
§ 91. Общее решение 415
§ 92. Особые решения 418

Глава XIV. **Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной** 423
§ 93. Уравнения, допускающие разрешение относительно производной . . . . . —
§ 94. Интегрирование с помощью дифференцирования 425

Глава XV. **Дифференциальные уравнения высших порядков** 434

§ 95. Основные понятия . . . . . —
§ 96. Дифференциальное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ 436
§ 97. Некоторые дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка 438
§ 98. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка . . . 445
§ 99. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами 454
§ 100. Некоторые приложения дифференциальных уравнений второго порядка к колебательным процессам 463

Глава XVI. **Понятие о дифференциальных уравнениях в частных производных и их приложениях** 468

§ 101 Общие сведения . . . . . —
§ 102. Задача о колебаниях струны 470

ГЛАВА I.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В первом томе курса математического анализа*) указывалось, что основной задачей математического анализа является изучение функций. Дифференциальное исчисление позволяет изучать многие вопросы, связанные с теми или иными свойствами функции (возрастание и убывание, экстремумы и точки перегиба, приближенное вычисление значений функции и др.). Тем не менее с помощью только дифференциального исчисления мы не можем эффективно изучать некоторые функции, например функции непрерывные и нигде не дифференцируемые, и даже не можем установить самого факта существования таких функций. Однако проблема изучения таких функций, как и многие другие проблемы математического анализа, успешно решается на основании теории рядов. Ряды в математическом анализе выступают как основной аппарат построения функций с заданными свойствами и дальнейшего исследования их. Мы увидим далее, что с помощью рядов нередко удачно решается и задача вычисления значений функции. В этой главе мы рассмотрим числовые ряды.

§ 1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА И ЕГО СУММЫ

Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{u_n\}$.

Образуем из элементов этой последовательности следующий символ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . \qquad (1)$$

Составленный таким образом символ (1) называется *числовым рядом* (или просто *рядом*). Так как в его составлении участвует знак $+$, то часто ряд записывают в таком виде: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где указано, что индекс n пробегает все натуральные числа: 1, 2, 3, ... Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*. Член, стоящий в ряде на каком-либо конкретном, например n-м, месте от начала, т. е.

*) Уваренков И. М. и Маллер М. З. Курс математического анализа, т. I. М., 1966.

u_n, называется *n-м его членом*. Когда номер n не фиксируют, то u_n называют *общим членом ряда*.

Ряд считается заданным, если задана последовательность $\{u_n\}$ (т. I, § 25), с помощью которой он был образован, т. е. ряд считается заданным, если задан его общий член; обычно он задается с помощью формулы. Так, если общий член ряда задан формулой $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$, то сам ряд имеет вид:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots.$$

Если $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, то имеем ряд вида:

$$1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Вместо этого обычно принято в таком случае писать:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Формулой $u_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ задается ряд:

$$1+0+1+0+\ldots+\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}+\ldots.$$

В арифметике и алгебре рассматриваются суммы с конечным числом слагаемых. В ряде же «слагаемых» бесконечно много. Поэтому понятие суммы, состоящей из бесконечного числа слагаемых, требует некоторого специального определения. Введем такое определение.

Возьмем сумму n первых членов ряда (1) и обозначим ее через S_n:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n. \qquad (2)$$

Эту сумму назовем *n-й частичной суммой ряда* (1). При этом под S_1 условимся понимать u_1.

Давая в (2) n последовательно значения 1, 2, 3, ..., получим последовательность частичных сумм:

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ S_3=u_1+u_2+u_3,\ \ldots.$$

По отношению к последовательности $\{S_n\}$*) возможны два случая: 1) либо эта последовательность имеет конечный предел; 2) либо она не имеет конечного предела (стремится к бесконечности или вовсе не стремится ни к какому пределу).

Определение. *Если последовательность частичных сумм (или, иначе, частичная сумма S_n) имеет конечный предел* ($S=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$),

*) Вместо символа $\{S_n\}$ нередко употребляют символ (S_n).

то ряд (1) *называется сходящимся, а сам этот предел называется суммой ряда* (1). При этом пишут:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

или

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Таким образом, введенным определением ряду (1) приписана в указанном случае сумма.

Если же последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм не имеет предела, то ряд (1) называется *расходящимся*. Расходящийся ряд не имеет суммы в том смысле, как мы ее определили. Однако в том случае, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$, будем писать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, а также $S = \infty$.

Подчеркнем еще раз, что сумма ряда получается в результате двух операций: операции сложения и операции предельного перехода. Первая операция нужна для нахождения частичных сумм, а вторая — для нахождения их предела*).

Рассмотрим несколько примеров сходящихся и расходящихся рядов.

Пример 1. Пусть дан ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} + \ldots.$$

Возьмем n-ю частичную сумму данного ряда

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}.$$

Преобразуем ее. С этой целью, представив общий член ряда в виде $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$, мы можем частичную сумму S_n данного ряда записать так:

$$S_n = \left(\frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 5}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 6}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}\right] + \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}\right].$$

Легко заметить, что здесь (при $n > 2$) взаимно уничтожаются вычитаемое в k-й скобке с уменьшаемым в $(k+2)$-й скобке ($k = 1, 2, 3, \ldots, n-2$). Поэтому, раскрывая скобки и производя соответствующие упрощения, получим:

---

*) Операция предельного перехода как бы приводит к распространению операции сложения на случай бесконечного числа слагаемых. С интуитивной точки зрения такое распространение представляется вполне естественным: устремляя в сумме S_n переменное n к бесконечности, мы как бы охватываем уже всю бесконечную совокупность слагаемых ряда.

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Теперь видим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ существует, причем

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, по принятому выше определению рассматриваемый ряд сходится, и мы можем написать:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} + \ldots .$$

Пример 2. Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$.

Здесь $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, и так как

$$S_n > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n = \sqrt{n}$$

при любом $n > 1$, то отсюда видим, что при неограниченном возрастании n частичная сумма S_n неограниченно возрастает вместе с $\sqrt{n}$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$, и, следовательно, данный ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$\ln\frac{1}{4} + \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} + \ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} + \ln\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13} + \ldots + \ln\frac{n(3n-2)}{(n-1)(3n+1)} + \ldots$$

(где первый член выходит из общего закона задания членов ряда).

Составим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_1 = \ln\frac{1}{4}, \quad S_2 = \ln\frac{1}{4} + \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} = \ln\frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 4\cdot 7} = \ln\frac{2}{7},$$

$$S_3 = \ln\frac{2}{7} + \ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} = \ln\frac{3}{10}, \quad S_4 = \ln\frac{3}{10} + \ln\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13} = \ln\frac{4}{13}.$$

Методом математической индукции легко доказывается, что

$S_n = \ln\frac{n}{3n+1}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\frac{n}{3n+1} = \ln\frac{1}{3}$, а поэтому данный ряд сходится и имеет сумму, равную $\ln\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\ln\frac{1}{3} = \ln\frac{1}{4} + \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} + \ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} + \ldots .$$

Рассмотрим ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0), \tag{3}$$

составленный из членов геометрической прогрессии: a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ... Часто данный ряд называют *геометрическим рядом*.

Этот ряд рассматривается и в школьном курсе математики при нахождении суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Выясним, при каких значениях q ряд (3) сходится.

Возьмем n-ю частичную сумму данного ряда: $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$. По формуле для суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем (при $q \neq 1$):

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}. \tag{4}$$

Если $|q| < 1$ (прогрессия убывающая), то $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ существует, и

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Следовательно, в случае, когда $|q| < 1$, ряд (3) сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$.

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \infty$, а тогда (так как $a \neq 0$) и

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \infty.$$

Значит, в случае, когда $|q| > 1$, ряд (3) расходится. Если $q = -1$, то частичная сумма S_n принимает вид:

$$S_n = \frac{a}{2}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ a \neq 0 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Отсюда ясно, что в этом случае S_n при $n \to +\infty$ предела не имеет и ряд (3) расходится.

Формула (4) была выведена при значении $q \neq 1$ и не может быть распространена непосредственно на случай $q = 1$, так как при этом значении правая часть ее теряет смысл. Но в этом случае $S_n = a + a + \ldots + a = na$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ $(a \neq 0)$. Значит, в случае $q = 1$ ряд (3) также расходится.

Итак, *геометрический ряд сходится при* $|q| < 1$ *и расходится при* $|q| \geqslant 1$ $(a \neq 0)$, причем в случае $|q| < 1$ имеем известную (из школьного курса математики) формулу суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots . \tag{5}$$

Например, при $a = \frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{2}$ из (5) получаем:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots .$$

Замечание. Как было установлено выше, непосредственное исследование вопроса о сходимости или расходимости какого-

либо ряда состоит в исследовании вопроса о сходимости или расходимости последовательности частичных сумм этого ряда. И наоборот, вопрос о сходимости или расходимости всякой последовательности чисел

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots \tag{6}$$

можно свести к вопросу о сходимости или расходимости некоторого ряда, а именно ряда:

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) + \ldots . \tag{7}$$

Действительно, n-я частичная сумма ряда (7), очевидно, равна S_n, т. е. n-му члену последовательности (6), и, следовательно, вопрос о существовании предела этой последовательности равносилен вопросу существования суммы ряда (7).

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Теорема 1. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

сходится и имеет сумму S, то ряд

$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots + cu_n + \ldots , \tag{2}$$

где c — какая-либо постоянная, также сходится и имеет сумму σ, равную cS.

Доказательство. Возьмем n-ю частичную сумму ряда (2):

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots + cu_n.$$

По свойству конечных сумм мы можем переписать ее в виде:

$$\sigma_n = c\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n).$$

Выражение в скобках есть n-я частичная сумма S_n ряда (1), поэтому $\sigma_n = cS_n$. Так как по условию $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$, так что ряд (2) сходится, причем

$$\sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} (cS_n) = c \lim_{n\to+\infty} S_n = cS.$$

Итак, *если все члены данного сходящегося ряда умножить на одно и то же число c, то сходимость этого ряда не нарушится, а сумма его умножится на то же число*: $\sigma = cS$.

Равенство $\sigma = cS$ можно переписать так:

$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots + cu_n + \ldots = c\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots).$$

Таким образом, сходящиеся ряды, подобно конечным суммам, подчиняются дистрибутивному закону умножения (так что в сходящемся ряде можно выносить за скобки общий множитель всех членов ряда).

Следствие. *Если ряд* (1) *расходится и* $c \neq 0$, *то ряд* (2) *также расходится.*

Действительно, если бы ряд (2) сходился, то сходился бы и ряд (1) (так как умножая все члены ряда (2) на $\frac{1}{c}$, мы получим ряд (1)), который по условию расходится.

Замечание. Ограничение $c \neq 0$ здесь существенно, так как при $c = 0$ ряд (2), как состоящий из одних нулей, будет сходящимся (для такого ряда $S_n = 0$ при любом n и $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$).

Теорема 2. *Если ряды*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{4}$$

сходятся и имеют соответственно суммы S *и* S', *то ряды*

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots \tag{5}$$

и

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \ldots \tag{6}$$

также сходятся и их суммы соответственно равны $S + S'$ *и* $S - S'$.

Доказательство. Докажем, например, сходимость ряда (5). Возьмем частичную сумму σ_n этого ряда:

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \\ + \ldots + (u_n + v_n).$$

Так как σ_n есть сумма конечного числа слагаемых, то мы можем, перегруппировав в ней соответствующим образом члены, записать:

$$\sigma_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + v_3 + \\ + \ldots + v_n).$$

Выражения в скобках представляют собой соответственно частичные суммы S_n и S_n' рядов (3) и (4), поэтому $\sigma_n = S_n + S_n'$.

Так как по условию $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n' = S'$, то в записанном выше равенстве можно перейти к пределу при $n \to +\infty$; получим:

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n + S_n') = \lim_{n \to +\infty} S_n + \lim_{n \to +\infty} S_n' = S + S',$$

что и доказывает наше утверждение для ряда (5).

Аналогично доказывается, что ряд (6) также сходится и что его сумма равна $S - S'$.

Относительно рядов (5) и (6) говорят, что они получены в результате почленного сложения или соответственно почленного вычитания рядов (3) и (4), и доказанную теорему часто формулируют так: *почленное сложение* (*вычитание*)

двух сходящихся рядов дает снова сходящийся ряд, и сумма нового ряда получается сложением (вычитанием) сумм двух данных рядов.

Таким образом, сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать так же, как и конечные суммы. Этот результат распространяется и на алгебраическую сумму нескольких сходящихся рядов.

Замечание. Если ряд (3) сходится, а ряд (4) расходится, то ряд (5) расходится (ибо в противном случае ряд (4), будучи разностью двух сходящихся рядов, был бы сходящимся рядом). Если же ряды (3) и (4) оба расходятся, то о рядах (5) и (6) в общем случае ничего сказать нельзя. Они могут оказаться как сходящимися, так и расходящимися. Например, ряды

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

и

$$-1 - 2 - 3 - \ldots - n - \ldots$$

расходятся. Однако, складывая данные ряды почленно, получим сходящийся ряд: $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$, в то время как, вычитая эти ряды почленно, получим расходящийся ряд: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + \ldots$.

Теорема 3. *Если в сходящемся ряде произвольно объединять члены ряда в группы, не меняя при этом порядка следования членов, то получится снова сходящийся ряд, сумма которого равна сумме данного ряда.*

Доказательство. Пусть ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (7)$$

сходится и имеет сумму S. Произведем любым способом группировку членов этого ряда, не меняя их порядка, т. е. рассмотрим ряд вида:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \ldots + u_{k_2}) + \ldots + (u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \ldots + u_{k_n}) + \ldots \qquad (8)$$

(где считается $k_0 = 0$).

Нам надо доказать, что ряд (8) сходится и что его сумма равна S.

Каждая из сумм, заключенных в скобки, является отдельным членом нового ряда с общим членом $U_n = u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \ldots + u_{k_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; n-я частичная сумма S'_n этого ряда есть: $S'_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \ldots + u_{k_2}) + \ldots + (u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \ldots + u_{k_n}) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{k_n} = S_{k_n}$.

Таким образом, n-я частичная сумма преобразованного ряда (8) совпадает с k_n-й частичной суммой исходного ряда (7).

Так как при $n \to +\infty$ и $k_n \to +\infty$ $(k_n \geqslant n,\ n = 1, 2, \ldots)$ и ряд (7) сходится, то $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{k_n} = \lim\limits_{k_n \to +\infty} S_{k_n} = S$, что и требовалось доказать.

Заметим, что обратная теорема неверна, т. е. из сходимости ряда (8) не всегда следует сходимость ряда (7). Например, ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$ сходится и имеет сумму, равную нулю. Но ряд $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$, полученный из данного «раскрытием скобок», расходится, как геометрический ряд с $q=-1$.

Таким образом, для сходящихся рядов свойство ассоциативного сложения имеет место только в ограниченном смысле: любые подряд идущие в ряде члены можно произвольно объединить в группы; при этом сходимость ряда не нарушится и сумма его не изменится; однако раскрывать скобки не всегда возможно: ряд, получающийся после раскрытия скобок, может оказаться расходящимся.

Следствие. *Если ряд* (8) *расходится, то ряд* (7) *также расходится.*

Следствие очевидно, так как из сходимости ряда (7) вытекала бы и сходимость ряда (8).

Из содержания настоящего параграфа следует, что сходящиеся ряды во многих отношениях напоминают по своим свойствам обычные конечные суммы, но что, однако, далеко не всякое свойство конечных сумм может быть безоговорочно перенесено на бесконечные суммы, т. е. на ряды. Объясняется это тем, что нахождение суммы ряда производится не только с помощью операции обычного суммирования (нахождение S_n), но и с помощью операции предельного перехода.

§ 3. ОСТАТОК РЯДА

Пусть дан ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_k+u_{k+1}+\ldots. \tag{1}$$

Отбросим любое фиксированное число k его первых членов, тогда получим новый ряд

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n}+\ldots. \tag{2}$$

По своему поведению ряды (1) и (2) тесно связаны.

Теорема. *Ряды* (1) *и* (2) *либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.*

Доказательство. Пусть S_k — сумма k первых членов ряда (1), а S_n' — сумма n первых членов ряда (2). Тогда очевидно, что

$$S_n' = u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n} = (u_1+u_2+\ldots+u_{k+n})-(u_1+u_2+\ldots+u_k),$$

или

$$S_n' = S_{k+n}-S_k, \tag{3}$$

откуда

$$S_{k+n} = S_n'+S_k. \tag{4}$$

Предположим теперь, что ряд (1) сходится, и пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, а следовательно, и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{k+n} = S$, ибо при $n \to +\infty$ и $(k+n) \to +\infty$; тогда из равенства (3) находим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_{k+n} - S_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{k+n} - \lim\limits_{n\to+\infty} S_k = S - S_k$, т. е. предел частичной суммы ряда (2) существует и равен $S - S_k$, а это означает, что ряд (2) также сходится и сумма его равна $S - S_k$.

Предположим теперь, что сходится ряд (2), и пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = S'$. В таком случае из равенства (4) имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{k+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (S'_n + S_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_n + \lim\limits_{n\to+\infty} S_k = S' + S_k$, т. е. предел частичной суммы S_{k+n} ряда (1) существует и равен $S' + S_k$, а это означает, что ряд (1) тоже сходится и сумма его равна $S' + S_k$.

Если же один из двух рядов (1) или (2) расходится, то и второй не может сходиться, так как иначе по доказанному сходился бы и первый.

Следствие. *Ряды*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5}$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{6}$$

у которых лишь конечное число членов отличается друг от друга, либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

В самом деле, если, например, начиная с $n > k$, имеет место равенство $u_n = v_n$, то ряды (5) и (6) сходятся или расходятся одновременно с рядом (2).

Заметим, что отбрасывание какого-либо члена данного ряда можно рассматривать как частный случай изменения этого члена, а именно как замену этого члена нулем.

Таким образом, отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда. Поэтому при исследовании ряда на сходимость можно изменять конечное число членов этого ряда, а также добавлять или отбрасывать конечное число членов*).

Пример. Выяснить, сходится или расходится (или, как говорят, исследовать на сходимость) ряд

$$3 - 5 + 12 - 26 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-5}} + \ldots \quad (n>4).$$

Р е ш е н и е. Отбросим в данном ряде 4 первых члена, тогда получим новый ряд: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ ($n = 1, 2, \ldots$), который сходится как геометрический ряд с положительным знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, сходится и рассматриваемый ряд.

*) Разумеется, сумма сходящегося ряда при таких преобразованиях, вообще говоря, изменится.

Если ряд (2) (а значит, и (1)) сходится, то сумма ряда (2) называется *остатком ряда* (1) после k-го члена (или k-м остатком ряда (1)). При этом для того, чтобы указать, что ряд (2) получен из ряда (1) отбрасыванием в последнем именно k первых членов, принято обозначать остаток ряда (1) (т. е. сумму ряда (2)) через r_k.

Согласно доказанному выше, мы можем теперь сказать, что сумма ряда (1) равна сумме его k первых членов, сложенной с остатком r_k этого ряда, т. е. $S = S_k + r_k$. Отсюда ясно, что если в качестве приближенного значения суммы S ряда (1) взять сумму его k первых членов, то ошибка, которую мы при этом сделаем, будет равна остатку r_k данного ряда.

Так как $r_k = S - S_k$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} S_k = S$, то

$$\lim_{k \to +\infty} r_k = \lim_{k \to +\infty} (S - S_k) = S - \lim_{k \to +\infty} S_k = S - S = 0,$$

т. е. остаток r_k ряда (1) (иначе говоря, сумма ряда (2)) при неограниченном увеличении его номера стремится к нулю, и для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях k $|r_k|$ становится меньше числа ε. Следовательно, при достаточно большом k сумма S ряда (1) может быть выражена с любой точностью суммой его k первых членов.

§ 4. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Поскольку только сходящийся ряд определяет собой некоторое число, то первой основной задачей, относящейся к данному ряду, является вопрос о выяснении его сходимости или расходимости. При рассмотрении примеров в § 1 мы решали эту задачу непосредственно, пользуясь определением сходимости или расходимости ряда. Однако на практике решение вопроса о сходимости или расходимости данного ряда этим путем удается весьма редко, так как выражение для S_n через n часто бывает сложным и не позволяет непосредственно усмотреть, имеет ли это выражение предел при $n \to +\infty$. Поскольку далее нет одного признака, который позволил бы с удобством решать вопрос о сходимости или расходимости любого ряда*), приходится довольствоваться несколькими признаками, из которых каждый может оказаться пригодным в одном случае и непригодным в другом. Ниже будет дано несколько таких признаков. Сначала мы дадим необходимый признак сходимости ряда, т. е. укажем условие, при невыполнении которого ряд наверняка расходится.

Теорема. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

*) Приводимый ниже (с. 15) критерий Коши, хотя и является общим признаком, но неудобен на практике: по большей части его применение не легче, чем непосредственное разыскание предела частичной суммы S_n.

сходится, то его общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании номера этого члена, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится и сумма его равна S, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Так как последнее равенство имеет место при единственном условии, что $n \to +\infty$, то наряду с этим равенством имеет место и такое равенство: $\lim\limits_{(n-1)\to+\infty} S_{n-1}=S$, что равносильно условию $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$.

Запишем теперь очевидное равенство:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ существует; при этом

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Таким образом, для сходимости ряда (1) необходимо, чтобы общий член его имел предел, равный нулю.

Следствие. *Если общий член ряда* (1) *при неограниченном возрастании его номера имеет предел, отличный от нуля, или вовсе не имеет предела, то этот ряд расходится.*

Применение этого следствия часто позволяет быстро убедиться в расходимости некоторых рядов.

Пример 1. Ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ расходится, так как его общий член $u_n = (-1)^{n-1}n$ при $n \to +\infty$ конечного предела не имеет: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{4}$ также расходится, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ не существует.

Следует заметить, что теорема, обратная доказанной выше, неверна: если $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, то отсюда еще не следует, что ряд (1) сходится. Классическим примером в этом отношении является ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \qquad (2)$$

который называется *гармоническим**).

*) Каждый член ряда (2), начиная со второго, есть среднее гармоническое двух соседних с ним членов. (Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число c такое, что $\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$.)

Действительно, рассмотрим частичные суммы:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

и

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Если бы гармонический ряд был сходящимся, т. е. если бы переменная S_n при $n \to +\infty$ имела бы некоторый предел S, то, очевидно, тот же предел имела бы, при том же условии, и переменная S_{2n}. В таком случае оказалось бы, что

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0.$$

Но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n},$$

т. е. $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$, откуда ясно, что переменная $S_{2n} - S_n$ (оставаясь не меньше $\frac{1}{2}$) не может при $n \to +\infty$ стремиться к нулю, что противоречит предположению о сходимости гармонического ряда. Следовательно, *гармонический ряд расходится.*

Таким образом, стремление общего члена к нулю не является достаточным признаком для сходимости ряда.

§ 5. КРИТЕРИЙ КОШИ

Необходимое и достаточное условие сходимости данного ряда дается следующей ***теоремой*** (критерий Коши). *Для сходимости ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было бы указать такое натуральное число N, что при $n > N$ и при любом натуральном значении p будет выполняться неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

или, иначе,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Действительно, по определению ряд (1) сходится, если сходится последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ этого ряда. Но согласно критерию Коши существования предела последовательности (т. I, § 35) для сходимости последовательности частичных сумм S_n

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать натуральное число N такое, чтобы неравенство

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \tag{3}$$

было выполнено для всех $m > N$ и $n > N$.

Считая (для определенности) $m > n$ и полагая $m = n + p$, получим из (3):

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

когда $n > N$. Что касается натурального числа p, то оно может быть здесь любым, ибо числа m и n должны быть только большими N, а между собой могут отличаться как угодно.

Таким образом, говоря описательно, для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы сумма любого числа p подряд взятых членов ряда, следующих за достаточно далеким членом ($n > N$), была сколь угодно мала (меньше ε) по абсолютной величине.

Пример. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots .$$

Р е ш е н и е. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и покажем, что для этого числа можно найти такое натуральное число N, что неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ будет выполняться при $n > N$ и произвольном натуральном p.

Замечая, что $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$; $\frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\ldots$, $\frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$, имеем

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

при произвольном p. Отсюда следует, что при $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Таким образом, взяв $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (при $0 < \varepsilon < 1$), получим, что при $n > N$ и произвольном p выполняется требуемое неравенство (при $\varepsilon > 1$ уже годится $N = 1$) и ряд сходится.

Критерий Коши весьма плодотворен в теоретических исследованиях. С помощью его доказывают многие теоремы о рядах. Для практического же решения вопроса о сходимости того или иного

ряда критерий Коши малоудобен, так как обычно бывает трудно установить, выполняется ли для данного конкретного ряда условие (2). Поэтому на практике обычно применяют другие признаки, хотя не столь общие, но зато более удобные при исследовании вопроса о сходимости данного ряда.

§ 6. ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ РЯДЫ

Изучение наиболее употребительных признаков сходимости рядов начнем с таких рядов, у которых все члены одного и того же знака (точнее говоря, либо все неотрицательны, либо все неположительны), т. е. с так называемых *знакопостоянных рядов*. Ради определенности (без нарушения общности) мы будем при этом всегда предполагать, что все члены ряда неотрицательны; такие ряды мы будем называть *положительными рядами*. Ряд, все члены которого неположительны, путем умножения всех его членов на —1 приводится к положительному ряду, при этом «*характер*» данного *ряда* (т. е. его свойство быть сходящимся или расходящимся) не изменится.

1. Условие сходимости положительных рядов. Отметим важное условие сходимости положительных рядов.

Теорема. *Для того чтобы положительный ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Доказательство. Сначала установим достаточность указанного условия. Пусть последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots \qquad (2)$$

ряда (1) ограничена сверху. Так как все члены ряда (1) неотрицательны, то при всяком n имеем: $S_{n+1}=S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$, т. е. последовательность частичных сумм (2) монотонно не убывает. Но в то же время она ограничена сверху, следовательно, эта последовательность имеет конечный предел, т. е. ряд (1) сходится.

Докажем теперь необходимость высказанного условия. Пусть ряд (1) сходится. Согласно определению сходимости ряда это означает, что последовательность (2) имеет некоторый предел S. Следовательно, S_n — ограниченная переменная величина, в частности ограниченная сверху*). Теорема доказана.

Замечание 1. Так как частичные суммы ряда (1) монотонно не убывают, то при всех n будет $S_n \leqslant S$, в частности, если все члены этого ряда положительные числа (такой ряд называется обычно *знакоположительным*), то $S_n < S$.

---

*) Заметим, что необходимость условия доказана фактически для любого ряда, а не только для ряда с положительными членами.

Замечание 2. Для рядов, не являющихся знакопостоянными, это условие сходимости ряда остается только необходимым, но не достаточным. Так, например, частичные суммы ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$ ограничены (они принимают только значения 1 и 0), однако этот ряд расходится, так как общий член его не стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Для обычно встречающихся в математическом анализе и его приложениях знакопостоянных рядов сходимость устанавливается прямым или косвенным применением доказанного условия сходимости рядов: достаточно обнаружить существование оценки сверху (с помощью некоторого числа) величины S_n, чтобы убедиться в сходимости данного знакопостоянного ряда. Это условие сходимости рядов является основным для вывода достаточных признаков сходимости (и расходимости) знакопостоянных рядов. Общим приемом при выводе этих признаков служит сравнение изучаемого ряда с другим рядом, сходимость или расходимость которого известна.

2. Принцип сравнения рядов.

Теорема. *Если члены данного положительного ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

не превосходят соответствующих (по номеру) членов сходящегося положительного ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{4}$$

то данный ряд (3) *также сходится и сумма его не превосходит суммы ряда* (4); *если же ряд* (4) *расходится, а члены ряда* (3) *не меньше соответствующих членов расходящегося ряда* (4), *то ряд* (3) *также расходится.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть ряд (4) сходится и для всех значений n выполняется неравенство

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n. \tag{5}$$

Обозначим частичные суммы рядов (4) и (3) соответственно через σ_n и S_n. Тогда из условия (5) следует, что

$$S_n \leqslant \sigma_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Так как ряд (4) сходится, то (см. замечание 1) имеем: $\sigma_n \leqslant \sigma$, где σ — сумма ряда (4). Но тогда в силу (6) и подавно

$$S_n \leqslant \sigma, \tag{7}$$

т. е. последовательность частичных сумм положительного ряда (3) ограничена сверху числом σ. Отсюда по теореме п. 1 (достаточность условия) следует, что ряд (3) сходится.

Переходя в неравенстве (7) к пределу при $n \to +\infty$, мы убеждаемся, что сумма S ряда (3) не превосходит суммы σ ряда (4): $S \leqslant \sigma$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Допустим, что ряд (4) расходится и что для всех n выполняется неравенство $u_n \geqslant v_n \geqslant 0$. Тогда расходится и ряд (3). Действительно, если бы ряд (3) сходился, то, по только что доказанному, сходился бы и ряд (4), что противоречит условию.

Примечание. Принцип сравнения рядов остается в силе и в том случае, когда условие $u_n \leqslant v_n$ (или $u_n \geqslant v_n$) выполняется не при всех n, а лишь начиная с некоторого $n = N$, так как замена конечного числа членов ряда некоторыми новыми членами не влияет на его характер.

Пример 1. Ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$ сходится, так как его члены, начиная со второго, не больше соответствующих (по номеру) членов заведомо сходящегося ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ (геометрического ряда). Действительно для $n \geqslant 2$ имеем $n^n \geqslant 2^n$, и, значит, $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится. В самом деле, члены этого ряда, очевидно, больше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, а последний ряд может быть получен из гармонического ряда путем умножения его членов на $\frac{1}{2}$. Так как гармонический ряд расходится, то (по теореме 1, § 2) расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, а, следовательно, по принципу сравнения рядов расходится и данный ряд.

Отметим полезные следствия из доказанной выше теоремы, предполагая при этом, что члены ряда (4) положительны, а члены ряда (3) неотрицательны.

Следствие 1. *Если для рядов* (3) *и* (4) *существует предел* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ $(k < +\infty)$*), *то сходимость ряда* (4) *влечет за собой сходимость ряда* (3).

В самом деле, так как $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то согласно определению предела, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ (возьмем, например, $\varepsilon = 1$), можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $\left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < 1$, откуда $\frac{u_n}{v_n} < k + 1$ $(k + 1 > 0)$, так что

$$u_n < (k + 1)\, v_n \tag{8}$$

*) Так как $u_n \geqslant 0$, $v_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то здесь $k \geqslant 0$.

(ибо $v_n > 0$). Если теперь ряд (4) сходится, то в силу теоремы 1 § 2 сходится и ряд с общим членом $(k+1)\,v_n$. Но тогда на основании принципа сравнения рядов из неравенства (8) следует, что ряд (3) также сходится.

Следствие 2. *Если существует* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$ $(0<k\leqslant+\infty)$, *то из расходимости ряда* (4) *вытекает расходимость ряда* (3).

Действительно, если бы ряд (3) сходился (при $k\neq+\infty$), то в силу соотношения $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{1}{k}\left(0<\dfrac{1}{k}<+\infty\right)$ и следствия 1 сходился бы и ряд (4), что противоречит условию.

В случае $k=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$ имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=0$, и снова в силу того же следствия получаем противоречие.

Следствие 3. *Если существует* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$ $(0<k<+\infty)$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Смысл этого следствия состоит в том, что если общий член ряда (3) и общий член ряда (4) являются бесконечно малыми одного и того же порядка (при $n\to+\infty$), то сходимость одного из этих рядов влечет сходимость другого (а значит, и, наоборот, расходимость одного влечет расходимость другого).

Пример 3. Выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Р е ш е н и е. Возьмем вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}\right)^2\right]=\frac{\pi^2}{2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится (с. 16), то (по следствию 1) будет сходиться и данный ряд.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n+1}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+1}=1.$$

Так как ряд с общим членом $\dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится, то по следствию 2 будет расходиться и данный ряд.

Заключение о сходимости или расходимости какого-либо данного ряда практически не всегда удобно делать на основании принципа сравнения рядов, так как нет никаких общих правил для подбора подходящего ряда, сходимость или расходимость которого уже известна и сравнение с которым дало бы ответ на вопрос о сходимости или расходимости исследуемого ряда: все зависит от навыка исследователя, в частности от запаса известных ему сходящихся, расходящихся рядов. Поэтому возникает необходимость установить признаки, которые позволяли бы в большом числе случаев судить о сходимости или расходимости данного ряда, без привлечения других вспомогательных рядов. Большинство наиболее употребительных признаков этого рода основано на таком применении принципа сравнения рядов, при котором в качестве ряда для сравнения берут геометрический ряд. Мы рассмотрим здесь только лишь два из них, очень простых и удобных для применения,— признак Даламбера и признак Коши.

3. Признак Даламбера[*] (в предельной форме).

Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{9}$$

существует конечный предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$$

отношения $(n+1)$*-го члена к* n*-му, то при* $p < 1$ *данный ряд сходится, а при* $p > 1$ *— расходится.*

Доказательство. Пусть $p < 1$. Возьмем любое число q, удовлетворяющее неравенствам $p < q < 1$. Тогда из соотношения $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p < q$ следует, что существует такое натуральное число k, что для всех значений $n \geqslant k$ будет справедливо неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < u_n q$. В частности, при $n = k$ имеем:

$$u_{k+1} < u_k q. \tag{10}$$

При $n = k + 1$ получаем $u_{k+2} < u_{k+1} q$, откуда в силу (10) имеем: $u_{k+2} < u_k q^2$, а при $n = k + 2$ аналогично находим: $u_{k+3} < u_k q^3$. Методом математической индукции легко доказывается, что для любого натурального числа m выполняется неравенство

$$u_{k+m} < u_k q^m. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь два ряда:

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+m} + \ldots \tag{12}$$

и

$$u_k q + u_k q^2 + \ldots + u_k q^m + \ldots . \tag{13}$$

---

[*] Даламбер (1717—1783) — французский математик.

Ряд (13) сходится (как геометрический ряд со знаменателем $|q| < 1$). Члены же положительного ряда (12), как показывает неравенство (11), меньше соответствующих членов ряда (13). Следовательно, на основании принципа сравнения рядов этот ряд также сходится. Но тогда сходится и данный ряд (9), так как он отличается от ряда (12) только несколькими добавленными членами $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Пусть теперь $p > 1$. Тогда из соотношения $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p > 1$ следует, что, начиная с некоторого номера $n = k$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$. Это неравенство означает, что члены ряда (9), начиная с номера k, образуют возрастающую последовательность положительных чисел и, следовательно, общий член ряда (9) не стремится к нулю при $n \to +\infty$. Но в таком случае в силу следствия из необходимого признака сходимости (§ 4) ряд (9) расходится.

Замечание 1. Ряд (9) будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. Действительно, если $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, то, начиная с некоторого номера $n=k$, имеет место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, откуда так же, как и выше, следует, что ряд (9) расходится.

Пример 5. Выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Решение. Имеем: $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Так как здесь $p = \frac{1}{e} < 1$, то, на основании признака Даламбера, мы заключаем, что данный ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\frac{2}{1^s} + \frac{2^2}{2^s} + \frac{2^3}{3^s} + \ldots + \frac{2^n}{n^s} + \ldots$, где s — некоторое число.

Решение. Здесь $u_n = \frac{2^n}{n^s}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^s}$, откуда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{2^n}{n^s}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = 2$$

при любом s. Так как $p = 2 > 1$, то, согласно признаку Даламбера, заключаем, что при любом s рассматриваемый ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{10} = +\infty.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

З а м е ч а н и е 2. Признак Даламбера решает вопрос о сходимости или расходимости рассматриваемого ряда (9) только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ существует и отличен от единицы. Если же этот предел не существует или существует, но равен единице, то признак Даламбера не дает ответа на этот вопрос. При этом (как мы увидим ниже на примерах) ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. В этом, так называемом «сомнительном случае» вопрос о характере данного ряда приходится решать как-либо иначе. Рассмотрим, например, ряд

$$a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots + \frac{a^n}{n} + \ldots \quad (a \geqslant 0).$$

При $a = 0$ непосредственно видим, что ряд (3) сходится. Пусть теперь $a \neq 0$. Применим к данному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}n}{(n+1)a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a.$$

На основании признака Даламбера заключаем, что данный ряд сходится при $a < 1$ и расходится при $a > 1$.

Если $a = 1$, то признак Даламбера оставляет вопрос о сходимости рассматриваемого ряда открытым. Но в этом случае данный ряд имеет вид: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Это гармонический ряд; он, как мы видели выше (§ 4), расходится.

Рассмотрим другой ряд: $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} + \ldots$.

Имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1.$$

Таким образом, признак Даламбера снова не дает здесь ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Между тем принцип сравне-

ния рядов решает этот вопрос: так как при всех значениях n $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (см. с. 16), то на основании принципа сравнения рядов мы заключаем, что и рассматриваемый ряд сходится.

4. Признак Коши (в предельной форме). *Если для положительного ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{14}$$

существует конечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = p,$$

то при $p<1$ данный ряд сходится, а при $p>1$ — расходится.

Доказательство. Пусть сначала $p<1$. Возьмем какое-либо число q, удовлетворяющее соотношению $p<q<1$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = p < q$, то, начиная с некоторого номера $n=k$, будет выполняться неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$, или $u_n < q^n$ $(n \geqslant k)$, а это значит, что

$$u_k < q^k,\ u_{k+1} < q^{k+1},\ u_{k+2} < q^{k+2},\ \ldots . \tag{15}$$

Так как $0<q<1$, то геометрический ряд

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \ldots \tag{16}$$

сходится; члены же данного ряда (14), начиная с номера k, как показывают неравенства (15), меньше соответствующих членов геометрического ряда (16), следовательно, по принципу сравнения рядов ряд (14) также сходится.

Пусть теперь $p>1$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = p > 1$, то, начиная с некоторого номера $n=k$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1$, откуда $u_n > 1$ $(n \geqslant k)$. Следовательно, общий член ряда (14) не стремится к нулю при $n \to +\infty$ и, значит, этот ряд расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. Имеем: $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Так как $p<1$, то, по признаку Коши, заключаем, что рассматриваемый ряд сходится.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$, то ряд (14) будет расходиться, так как и в этом случае, начиная с некоторого номера $n=k$, имеет место неравенство $\sqrt[n]{u_n}>1$.

Замечание 2. В случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ не существует или существует, но равен единице, признак Коши не дает ответа на вопрос о том, сходится ли ряд (14) или расходится, и вопрос о сходимости или расходимости данного ряда приходится решать с помощью дополнительного исследования. Так, например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ предел корня n-й степени из n-го члена этого ряда при $n\to\infty$ равен единице. Действительно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}$. Обозначая $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}=a_n$, имеем: $\ln a_n=\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}=-\frac{2\ln n}{n}$. Применяя правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2\ln n}{n}\right)=-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1}=0^{*)},$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}=1$. Между тем, как известно (с. 16), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

Напротив, ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ расходится, но для этого ряда также имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1}=1$.

---

*) В сущности непосредственно мы можем лишь утверждать, что, согласно правилу Лопиталя, при произвольном действительном x, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x}}{1}=0$. Но ясно, что если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, то и для функции натурального аргумента $f(n)$ мы можем, в частности, утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$, так что здесь и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2\ln n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{2}{n}}{1}\right)=0$. В этом смысле и следует понимать записанное равенство для $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2\ln n}{n}\right)$ с последующим «применением» правила Лопиталя.

5. Обобщенные признаки Даламбера и Коши. Имеют место следующие, более общие признаки Даламбера и Коши:

Положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, если существует такое положительное число* $q < 1$, *что для всех достаточно больших* n *выполняется соотношение* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ (*или* $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$); *этот ряд расходится, если для всех достаточно больших* n *имеет место соотношение* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (или $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$).

Доказательства обобщенных признаков являются почти дословным повторением доказательств выше изложенных признаков Даламбера и Коши в предельной форме. (Рекомендуется читателю провести их самостоятельно.)

Эти более общие признаки Даламбера и Коши часто оказываются полезными, когда приходится исследовать вопрос о сходимости или расходимости рядов, для которых отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ или выражение $\sqrt[n]{u_n}$ не имеет предела при $n \to +\infty$.

Пример 9. Ряд, заданный рекуррентно соотношениями

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{3} u_n, & \text{если } n \text{ четно} \end{cases}$$

($u_1 = 1$), сходится, так как здесь при любом n

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Заметим, что здесь предельный признак Даламбера неприменим, ибо отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не имеет предела. Однако следует отметить, что в случае применимости предельных признаков Даламбера и Коши они, как правило, удобнее на практике, чем соответствующие общие признаки.

Естественно поставить вопрос о сравнительной силе предельных признаков Даламбера и Коши. В связи с этим рассмотрим следующий пример.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд с общим членом:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n-1)^2}} & \text{для нечетных } n, \\ \frac{1}{3^{n^2}} & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{2^{(n-1)^2}}{3^{(n+1)^2}}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \dfrac{3^{n^2}}{2^{n^2}}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

При нечетном $n = 2k-1$ имеем, что последовательность $\dfrac{u_{2k}}{u_{2k-1}}$ сходится к нулю, а при четном $n = 2k$ $\dfrac{u_{2k+1}}{u_{2k}} \to +\infty$, так что отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ не имеет предела при $n \to +\infty$, и, таким образом, признак Даламбера здесь неприменим. Вместе с тем

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{(n-1)^2}}}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \dfrac{1}{3^{n^2}}, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$ и, значит, согласно предельному признаку Коши, данный ряд сходится.

Можно доказать, что признак Коши дает ответ на вопрос о сходимости положительного ряда во всех тех случаях, когда этот ответ дает и признак Даламбера. Последний пример показывает, однако, что обратное не имеет места. В этом смысле говорят, что признак Коши является более сильным признаком, чем признак Даламбера. Зато в тех случаях, когда они применимы оба, признаком Даламбера, как правило, пользоваться значительно проще.

6. Интегральный признак Коши. Выше мы видели, что признаки Даламбера и Коши не всегда являются эффективными при исследовании характера данного ряда. Мы сейчас рассмотрим еще один признак сходимости ряда с положительными членами, который позволяет иногда решать вопрос о сходимости ряда в тех случаях, когда упомянутые выше признаки оказываются непригодными. Этот признак основан на сравнении данного ряда с некоторым несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$, значения которой при последовательных целых значениях аргумента дают все члены этого ряда.

Теорема (интегральный признак Коши). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает для всех $x \geqslant a$, где a — некоторое натуральное число. Тогда числовой ряд*

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(a+n) + \ldots \qquad (17)$$

сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Доказательство. По условию функция $f(x)$ невозрастающая для $x \geqslant a$, поэтому при $a + k - 1 \leqslant x \leqslant a + k$, где k — любое натуральное число, имеем:

$$f(a + k - 1) \geqslant f(x) \geqslant f(a + k). \tag{18}$$

Следовательно,

$$\int_{a+k-1}^{a+k} f(a + k - 1)\, dx \geqslant \int_{a+k-1}^{a+k} f(x)\, dx \geqslant \int_{a+k-1}^{a+k} f(a + k)\, dx,$$

или

$$f(a + k - 1) \geqslant \int_{a+k-1}^{a+k} f(x)\, dx \geqslant f(a + k), \tag{19}$$

где k — любое натуральное число.

Давая в (19) k последовательно значения 1, 2, 3, ..., n, получим неравенства:

$$f(a) \geqslant \int_{a}^{a+1} f(x)\, dx \geqslant f(a + 1),$$

$$f(a + 1) \geqslant \int_{a+1}^{a+2} f(x)\, dx \geqslant f(a + 2),$$

. . . . . .

$$f(a + n - 1) \geqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\, dx \geqslant f(a + n).$$

Складывая почленно эти неравенства, найдем:

$$f(a) + f(a + 1) + \ldots + f(a + n - 1) \geqslant \int_{a}^{a+n} f(x)\, dx \geqslant f(a + 1) + f(a + 2) + \ldots + f(a + n).$$

Обозначая теперь n-ю частичную сумму ряда (17) символом S_n, будем иметь: $S_n \geqslant \int_{a}^{a+n} f(x)dx \geqslant S_{n+1} - f(a)$. Отсюда получаем два неравенства:

$$S_{n+1} - f(a) \leqslant \int_{a}^{a+n} f(x)\, dx, \tag{20}$$

$$S_n \geqslant \int_{a}^{a+n} f(x)\, dx. \tag{21}$$

Пользуясь этими неравенствами, теперь легко доказать теорему. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^{a+n} f(x)\,dx$. При этом, так как по условию теоремы $f(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant a$, то $\int_a^{a+n} f(x)\,dx$ с возрастанием n не убывает и, значит, при всяком значении n не превосходит своего предела (т. I, § 35):

$$\int_a^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+n} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Принимая во внимание неравенство (20), получаем:

$$S_{n+1} - f(a) \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } S_{n+1} \leqslant f(a) + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Это означает, что частичная сумма S_{n+1} положительного ряда (17) ограничена сверху при всех значениях n и потому (с. 17) этот ряд сходится.

2. Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Для неотрицательной функции $f(x)$ это означает, что $\int_a^{a+n} f(x)dx$ неограниченно возрастает при возрастании n. Но тогда в силу неравенства (21) S_n также неограниченно возрастает при возрастании n, т. е. ряд (17) расходится.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots, \tag{22}$$

где α — любое действительное число.

Р е ш е н и е. Сначала заметим, что при условии $\alpha \leqslant 0$ n-й член ряда (22) не стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. не выполняется даже необходимый признак сходимости ряда, и, следовательно, ряд (22) расходится.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Прежде всего, как читатель легко проверит, признаки Даламбера и Коши вопроса о сходимости этого ряда не решают. С помощью же интегрального признака вопрос о сходимости этого ряда решается легко.

Полагая в (17) $a = 1$ и беря функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, мы можем рассматривать данный ряд (22) как ряд вида (17): члены ряда (22) суть значения функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ при $x = 1, 2, 3, \ldots$.

Так как для $x \geqslant 1$ функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ непрерывна, положительна и убывает ($\alpha > 0$), то по доказанной теореме вопрос о сходимости ряда (22) эквивалентен вопросу о сходимости несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$, т. е. ряд (22) сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится этот интеграл. Но $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$ (т. I, § 106, пример 3), и, значит, ряд (22) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Итак, ряд (22) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Этот ряд используется при исследовании рядов на сходимость способом сравнения.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n}}$.

Р е ш е н и е. Нетрудно было бы убедиться, что признаки Даламбера и Коши не решают вопроса о сходимости данного ряда. Но если мы сравним общий член этого ряда с общим членом ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (это ряд (22) с $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), то найдем, что $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n}} < \frac{1}{2n\sqrt{2n}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n}}$.

Привлекая известный признак сходимости несобственных интегралов (т. I, § 106), можно высказать следующее правило исследования на сходимость положительных рядов:

Если, начиная с некоторого номера n, члены положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ монотонно убывают, являясь числовыми значениями непрерывной монотонной убывающей функции $f(n)$, так что $u_n = f(n)$, то данный ряд сходится, когда $f(n)$ есть бесконечно малая порядка выше 1-го, по сравнению с $\frac{1}{n}$ при $n \to +\infty$, т. е. если

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} = A \neq 0 \quad (\alpha > 1),$$

и расходится, когда порядок малости $f(n)$ будет равным или меньшим единицы, т. е. если

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} = A \neq 0 \quad (\alpha \leqslant 1).$$

Пример 13. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^4+5n}$ сходится, так как при $n \to +\infty$ его общий член $\frac{3n-1}{n^4+5n}$ есть монотонно убывающая бесконечно малая, порядка 3, по сравнению с $\frac{1}{n}$.

Пример 14. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+5}}$ расходится, так как при $n \to +\infty$ его общий член есть монотонно убывающая бесконечно малая, порядка $\frac{1}{2}$, по сравнению с $\frac{1}{n}$.

§ 7. РЯДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. АБСОЛЮТНАЯ И НЕАБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

В предыдущем параграфе мы рассматривали только такие ряды, все члены которых одного знака (не считая членов, равных нулю). Рассмотрение рядов, у которых все члены, начиная лишь с некоторого, одного знака, не дает по сравнению с этим ничего нового, так как при решении вопроса о сходимости или расходимости ряда можно не считаться со значениями конечного числа его членов. Существенно новый объект представляют собой лишь ряды, содержащие бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов. Такие ряды обычно называют *знакопеременными*.

1. Знакочередующиеся ряды. Прежде всего остановимся на частном случае — на так называемых знакочередующихся рядах, т. е. рядах, у которых каждые два соседних члена имеют противоположные знаки.

Обычно знакочередующийся ряд записывают в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2k-1} - u_{2k} + \ldots^{*)},$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — абсолютные величины членов этого ряда.

Укажем один очень простой *достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда*, принадлежащий Лейбницу.

Теорема 1 (признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots \qquad (1)$$

монотонно убывают по абсолютной величине, т. е. при любом n выполняется неравенство $u_{n+1} < u_n$, *и общий член ряда при* $n \to +\infty$ *стремится к нулю* ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$), *то этот ряд* (ряд Лейбница) *сходится.*

*) При этом мы считаем здесь первый член ряда положительным (если он отрицателен, то умножением всех членов ряда на (—1) приведем этот ряд к ряду с первым положительным членом).

Доказательство. Возьмем частичную сумму S_{2n} четного порядка ряда (1), т. е. сумму первых $2n$ членов этого ряда:

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n}.$$

Очевидно, если мы увеличим n на единицу, то в частичной сумме S_{2n} прибавится два новых слагаемых: u_{2n+1} и $-u_{2n+2}$. Поэтому $S_{2n+2} = S_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$. Так как для всех n по условию теоремы $u_{2n+1} > u_{2n+2}$, то $S_{2n+2} > S_{2n}$, т. е. последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает.

Покажем далее, что эта последовательность ограничена сверху. Для этого запишем частичную сумму S_{2n} в виде:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Каждая из разностей, записанных в скобках, положительна. Поскольку и $u_{2n} > 0$, то ясно, что при любом n будет $S_{2n} < u_1$.

Таким образом, последовательность $\{S_{2n}\}$ частичных сумм четного порядка возрастает с возрастанием n и ограничена сверху. Но тогда на основании признака сходимости монотонной последовательности эта последовательность стремится к некоторому пределу S:

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = S.$$

Но сходимость ряда (1) еще не установлена: мы только доказали, что последовательность частичных сумм четного порядка имеет некоторый предел S. Чтобы установить сходимость ряда (1), покажем еще, что последовательность частичных сумм, составленных из нечетного числа членов этого ряда, также сходится и имеет тот же предел S. Возьмем частичную сумму S_{2n-1} нечетного порядка ряда (1), т. е. сумму

$$S_{2n-1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2n-2} + u_{2n-1}.$$

Очевидно, что $S_{2n-1} = S_{2n} + u_{2n}$. Поскольку, по условию теоремы, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, то и $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = 0$, а так как, по доказанному выше, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = S$, то имеем:

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n-1} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n} + \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = S,$$

т. е. последовательность $\{S_{2n-1}\}$ частичных сумм нечетного порядка сходится, причем к тому же самому пределу S, что и $\{S_{2n}\}$.

Итак, S_m при неограниченном возрастании m стремится к определенному пределу S, как при четном m, так и нечетном m.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое натуральное K, что при $m > K$ неравенство $|S_m - S| < \varepsilon$ будет выполняться как для четных, так и для нечетных m, т. е. для всех натуральных $m > K$, так что $\lim\limits_{m \to +\infty} S_m = S$. Следовательно, ряд (1) сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы мы видели, что частичные суммы $\{S_{2n}\}$ четного числа членов ряда (1) стремятся к сумме S ряда, возрастая. Легко убедиться, что частичные суммы $\{S_{2n-1}\}$ нечетного числа членов этого ряда стремятся к сумме данного ряда, убывая. С этой целью сравним частичные суммы S_{2n-1} и S_{2n+1}. Очевидно, $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -(u_{2n} - u_{2n+1})$. Так как $u_{2n} > u_{2n+1}$ при любом n, то $S_{2n+1} < S_{2n-1}$, т. е. последовательность $\{S_{2n-1}\}$ монотонно убывает.

Таким образом, для любого номера n имеет место двойное неравенство: $S_{2n} < S < S_{2n-1}$ (т. I, § 35), т. е. сумма ряда (1) больше любой частичной суммы S_{2n} с четным индексом и меньше любой частичной суммы S_{2n-1} с нечетным индексом. Значит, частичная сумма S_n ряда (1), приближаясь к пределу S, бывает то больше, то меньше его. В частности, можно утверждать, что $u_1 - u_2 < S < u_1$ и, значит (так как $u_1 > u_2$), $0 < S < u_1$. Последнее неравенство показывает, *что сумма ряда Лейбница с положительным первым членом всегда положительна и меньше этого члена.*

С этим фактом связана одна важная особенность сходящегося знакочередующегося ряда. При приближенном вычислении суммы какого-либо сходящегося ряда путем замены ее той или иной частичной суммой мы часто встречаемся с необходимостью оценки совершаемой при этом ошибки. Такая оценка особенно легко получается в случае, когда рассматриваемый ряд есть ряд Лейбница. Действительно, возьмем за приближенное значение суммы S этого ряда сумму $2n$ первых членов ряда. Так как $S_{2n} < S$, то вычисление в этом случае будет произведено с недостатком и ошибка вычисления равна сумме остатка ряда:

$$r_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} + \ldots$$

(§ 3). Но этот остаток также является рядом Лейбница с первым положительным членом. Поэтому $0 < r_{2n} < u_{2n+1}$.

Если же мы за приближенное значение суммы ряда возьмем сумму $2n - 1$ первых членов ряда Лейбница, то вычисление суммы ряда будет сделано с избытком и ошибка вычисления равна сумме ряда — остатка:

$$r_{2n-1} = -u_{2n} + u_{2n+1} - \ldots = -(u_{2n} - u_{2n+1} + \ldots).$$

Отсюда, во-первых, $r_{2n-1} < 0$; во-вторых,

$$|r_{2n-1}| = u_{2n} - u_{2n+1} + \ldots .$$

Ряд для $|r_{2n-1}|$ есть опять-таки ряд Лейбница. Следовательно, его сумма меньше первого члена, т. е. $|r_{2n-1}| < u_{2n}$.

Таким образом, *если за значение суммы ряда Лейбница взять значение какой-нибудь частичной суммы, то абсолютная величина получаемой при этом ошибки будет меньше абсолютной величины первого из не взятых в эту сумму членов ряда; знак погрешности вычисления одинаков со знаком этого члена.*

Этим свойством рядов Лейбница широко пользуются при приближенных вычислениях, связанных с применением рядов.

Пример 1. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет всем условиям признака Лейбница. Именно члены его убывают по абсолютной величине: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}>\ldots$ и стремятся к нулю при $n\to+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Если за приближенное значение суммы данного ряда возьмем, например, частичную сумму $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$, то вычисление суммы ряда будет произведено с недостатком. Если же за приближенное значение суммы этого ряда взять частичную сумму $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$, то вычисление будет сделано с избытком. Таким образом, сумма данного ряда заключается между числами $\frac{7}{12}$ и $\frac{47}{60}$.

Следует заметить, что признак Лейбница для знакочередующихся рядов является лишь достаточным признаком сходимости, но не необходимым.

2. Абсолютная и неабсолютная сходимость рядов. Перейдем теперь к рассмотрению *знакопеременных рядов*, у которых члены с положительными и отрицательными знаками не обязательно чередуются. При этом, в отличие от п. 1, мы снова будем обозначать символом u_n сам n-й член ряда, а не его абсолютную величину, т. е. рассматриваемый знакопеременный ряд будем обозначать символом:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{2}$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ — любые действительные числа.

Одновременно с этим рядом рассмотрим ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{3}$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда (2).

Следующая теорема устанавливает зависимость между поведением рядов (2) и (3).

Теорема 2. *Если ряд* (3), *составленный из абсолютных величин членов ряда* (2), *сходится, то ряд* (2) *также сходится.*

Доказательство. Составим два вспомогательных ряда:

$$\frac{|u_1|+u_1}{2}+\frac{|u_2|+u_2}{2}+\ldots+\frac{|u_n|+u_n}{2}+\ldots, \tag{4}$$

$$\frac{|u_1|-u_1}{2}+\frac{|u_2|-u_2}{2}+\ldots+\frac{|u_n|-u_n}{2}+\ldots. \tag{5}$$

Все члены рядов (4) и (5) неотрицательны, причем если $u_n\geqslant 0$, то $\frac{|u_n|+u_n}{2}=u_n$, $\frac{|u_n|-u_n}{2}=0$; если же $u_n<0$, то, наоборот, $\frac{|u_n|+u_n}{2}=0$, $\frac{|u_n|-u_n}{2}=-u_n=|u_n|>0$.

Поэтому можно сказать, что ряд (4) получен из данного ряда (2) заменой в нем всех отрицательных членов нулями, а ряд (5) получен из ряда (2) заменой в нем всех положительных членов нулями, а отрицательных членов — их абсолютными величинами. Так как члены положительных рядов (4) и (5) не превосходят соответствующих членов сходящегося положительного ряда (3), то эти ряды, по теореме сравнения, сходятся, а отсюда вытекает и сходимость ряда (2), так как он представляет собой разность двух сходящихся рядов (4) и (5).

Доказанная теорема позволяет для довольно широкого класса знакопеременных рядов свести исследование вопроса об их сходимости к исследованию вопроса о сходимости ряда с положительными членами.

Замечание 2. Из доказанной теоремы вытекает, что если S — сумма ряда (2) (для которого ряд (3) сходится), а S' и S'' — соответственно суммы рядов (4) и (5), то $S = S' - S''$, т. е. S есть разность между суммой ряда, составленного из всех положительных членов ряда (2), и суммой ряда, составленного из абсолютных величин всех отрицательных членов этого ряда. Действительно, ряды (4) и (5) отличаются от указанных рядов лишь (может быть) вставленными в разных местах нулевыми членами; эти члены можно отбросить, так как они не влияют ни на сходимость рядов, ни на их суммы.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n-1}}+\ldots.$$

Решение. Наряду с данным рядом рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин всех членов данного ряда. Этот ряд сходится (с. 7). Следовательно, по доказанной теореме, данный знакопеременный ряд тоже сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1^2}+\frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{2^2}+\frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{n^2}+\ldots. \qquad (6)$$

Решение. Данный ряд является знакопеременным, в нем (начиная со второго члена) за каждыми двумя отрицательными членами следуют два положительных. Наряду с ним рассмотрим два ряда:

$$\left|\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1^2}\right|+\left|\frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{2^2}\right|+\left|\frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{n^2}\right|+\ldots \qquad (7)$$

и

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots. \qquad (8)$$

Ряд (8) сходится. Члены ряда (7) не больше соответствующих членов ряда (8). Следовательно, ряд (7) также сходится (§ 6). Но тогда, на основании доказанной теоремы, и ряд (6) сходится.

Следует заметить, что теорема, обратная теореме 2, неверна, т. е. из сходимости ряда (2) еще не следует с необходимостью сходимость ряда (3): существуют и такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин всех их членов, расходятся. Например, знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, как мы уже видели, сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин всех членов данного ряда, есть гармонический, который, как мы знаем, расходится.

Таким образом, для знакопеременных сходящихся рядов различают два случая: 1) данный знакопеременный ряд сходится, и ряд, составленный из абсолютных величин его членов, также сходится; 2) данный знакопеременный ряд сходится, но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

В связи с этим вводят нижеприведенные определения.

Определение 1. *Сходящийся ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

составленный из абсолютных величин всех членов данного ряда.

Например, ряды примеров 2 и 3 сходятся абсолютно. Очевидно также, что всякий знакопостоянный сходящийся ряд является абсолютно сходящимся.

Замечание 3. В связи с введенным определением абсолютной сходимости ряда мы можем замечание 2 сформулировать так: абсолютно сходящийся ряд можно представить в виде разности между сходящимся рядом, составленным из всех положительных членов ряда, и сходящимся рядом, составленным из абсолютных величин всех его отрицательных членов, так что сумма S данного ряда равна разности сумм S' и S'' указанных рядов: $S = S' - S''$.

Определение 2. *Если данный ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, тогда как ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

образованный из абсолютных величин его членов, расходится, то рассматриваемый ряд называется неабсолютно сходящимся (или, как часто говорят, *условно сходящимся*).

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, как мы видели выше, сходится,

в то время как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин всех членов рассматриваемого ряда, расходится. Следовательно, данный ряд сходится неабсолютно.

3. О достаточных признаках сходимости рядов с произвольными членами. В п. 1 мы рассмотрели теорему Лейбница, которая устанавливает достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда. К сожалению, нельзя указать столь же простого приема, позволяющего судить о сходимости или расходимости ряда с произвольными членами. В ряде случаев, однако, вопрос о сходимости таких рядов, как уже отмечалось выше, можно свести к вопросу о сходимости положительного ряда.

Теорема 3 (принцип сравнения). *Если члены ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{9}$$

по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{10}$$

с неотрицательными членами, то данный ряд (9) *сходится, и притом абсолютно.*

Действительно, возьмем ряд, составленный из абсолютных величин всех членов ряда (9):

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots . \tag{11}$$

Все члены этого ряда неотрицательны. Так как по условию $|u_n| \leqslant v_n$ при любом n, то положительный ряд (11) на основании принципа сравнения положительных рядов сходится, а, значит, по теореме 2 ряд (9) также сходится, и притом абсолютно.

Замечание 4. Отметим, что если ряд (10) расходится и $|u_n| \geqslant v_n$, то отсюда не следует расходимость ряда (9) (сравните с теоремой на с. 18), ряд (9) может сходиться и неабсолютно.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2^n}$, где α—любое число.

Решение. Так как $|\sin n\alpha| < 1$, каковы бы ни были n и α, то $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$. Но геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ есть ряд сходящийся, следовательно, данный ряд также сходится, и притом абсолютно.

Теорема 4 (признак Даламбера). *Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{12}$$

с отличными от нуля членами существует предел $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p$,

то при $p < 1$ *данный ряд* (12) *сходится, и притом абсолютно, а при* $p > 1$ *он расходится.*

В самом деле, пусть $p < 1$. Рассмотрим ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots . \tag{13}$$

Этот ряд знакоположительный, и для него мы имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p < 1.$$

Стало быть, на основании признака Даламбера (§ 6, п. 3), ряд (13) сходится, а тогда по теореме 2 данный ряд (12) также сходится, и притом абсолютно.

Пусть теперь $p > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера $n = k$, мы будем иметь: $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, или $|u_{n+1}| > |u_n|$. Но это неравенство показывает, что для всех $n \geqslant k$ члены ряда (12) возрастают по абсолютной величине и, следовательно, общий член этого ряда не стремится к нулю при $n \to +\infty$, т. е. ряд (12) расходится.

Если же $p = 1$, то и здесь (ср. с. 23) в общем случае о сходимости ряда ничего сказать нельзя. Так, например, $p = 1$ как для расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$, так и для абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

Теорема 5. *Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{14}$$

существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = p$, *то при* $p < 1$ *данный ряд сходится, и притом абсолютно, а при* $p > 1$ *он расходится.*

Действительно, если $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = p < 1$, то, по уже доказанному признаку Коши, для положительных рядов заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, а следовательно, сходится, и притом абсолютно, ряд (14).

Если же $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = p > 1$, то, начиная с некоторого номера $n = k$, имеем: $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$. Отсюда ясно, что u_n не стремится к нулю при $n \to +\infty$ и, следовательно, ряд (14) расходится.

Как и в случае признака Даламбера, при $p = 1$ вопрос о сходимости ряда не может быть решен по признаку Коши.

Пример 5. Выяснить, сходится ли знакопеременный ряд

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1!}+\frac{2^2\cos 3\frac{\pi}{4}}{2!}+\frac{3^2\cos 5\frac{\pi}{4}}{3!}+\ldots+\frac{n^2\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{n!}+\ldots.$$

Решение. Находим:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2\,n!\cos(2n+1)\frac{\pi}{4}}{(n+1)!\,n^2\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{n+1}{n^2}\right)=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, данный ряд сходится, и притом абсолютно.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Находим:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2n+1}\right|^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, по признаку Коши, данный ряд сходится, и притом абсолютно.

§ 8. О ПЕРЕСТАНОВКЕ ЧЛЕНОВ В РЯДАХ

Одним из важнейших свойств суммы конечного числа слагаемых является свойство переместительности, т. е. независимости суммы от порядка слагаемых. Естественно рассмотреть вопрос о том, переносится ли это свойство на сходящиеся ряды, т. е. сохранится ли величина суммы сходящегося ряда (и вообще, останется ли он сходящимся) при произвольной перестановке членов этого ряда. Как мы увидим ниже, ответ на этот вопрос, вообще говоря, будет отрицательным. Однако, если рассматриваемый ряд сходится абсолютно, то от перестановки его членов не меняется ни «характер» (с. 17) ряда, ни сама его сумма.

1. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Если в абсолютно сходящемся ряде переставить как угодно члены, то получится ряд также абсолютно сходящийся и его сумма будет равна сумме исходного ряда.*

Докажем сначала эту теорему для положительного сходящегося ряда. Пусть

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

есть положительный сходящийся ряд и сумма его равна S. Переставим некоторым образом члены этого ряда, тогда получим новый ряд:

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots.$$

Запишем члены этого ряда в старых обозначениях: $v_1 = u_{k_1}$, $v_2 = u_{k_2}$, $v_3 = u_{k_3}$, ..., $v_n = u_{k_n}$; тогда ряд примет вид:

$$u_{k_1} + u_{k_2} + u_{k_3} + \ldots + u_{k_n} + \ldots . \qquad (2)$$

Каждый член одного из рядов (1) и (2) является членом другого (но, быть может, стоящим в одном ряде под иным номером, чем в другом).

Возьмем n-ю частичную сумму σ_n ряда (2):

$$\sigma_n = u_{k_1} + u_{k_2} + u_{k_3} + \ldots + u_{k_n}.$$

Из всех чисел k_1, k_2, ..., k_n выберем наибольшее и обозначим его через m. Тогда среди слагаемых в частичной сумме S_m ряда (1) заведомо содержатся все слагаемые суммы σ_n, но сверх того S_m может содержать еще и другие (положительные) слагаемые, которые в σ_n не входят. Поэтому $\sigma_n \leqslant S_m$ (здесь n любое, а m выбрано в зависимости от n).

Так как положительный ряд (1) сходится и имеет сумму S, то при всяком m имеем: $S_m < S$. Но тогда и подавно (при любом n) $\sigma_n < S$. Последнее неравенство показывает, что частичные суммы положительного ряда (2) ограничены сверху. Следовательно, ряд (2) сходится и его сумма σ не превосходит S: $\sigma \leqslant S$.

Итак, показано, что от перестановки членов положительного ряда (1) сходимость его не нарушается и сумма не увеличивается. Но и ряд (1) может быть получен из ряда (2) в результате перестановки членов. Следовательно, по той же причине сумма S ряда (1) не больше суммы σ ряда (2), т. е. $S \leqslant \sigma$.

Из неравенств $\sigma \leqslant S$ и $S \leqslant \sigma$ следует, что $\sigma = S$.

Таким образом, для положительного сходящегося ряда теорема доказана.

Пусть теперь (1) есть произвольный абсолютно сходящийся ряд и сумма его S'.

По замечанию 2 (§ 7) сумма $S' = A - B$, где A — сумма положительных, а B — сумма абсолютных величин отрицательных членов ряда (1). Так как при перестановке мест слагаемых этого ряда переставятся положительные и отрицательные слагаемые, а по доказанному суммы A и B, а значит, и их разность при этом не изменятся, то не изменится и сумма ряда (1). Теорема доказана полностью.

Доказанная теорема может быть иногда использована для удобного вычисления суммы ряда.

Пример 1. Исследовать ряд

$$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{3^{2n-1}} + \ldots \qquad (3)$$

на сходимость, и в случае сходимости этого ряда найти его сумму.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов данного ряда.

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{3^{2n-1}}+\ldots. \qquad (4)$$

Легко видеть, что ряд (4) получается из сходящегося геометрического ряда $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots$ путем перестановки каждого члена, стоящего на нечетном месте, на соседнее справа, четное, и наоборот. Но тогда по доказанной теореме ряд (4) сходится, и отсюда по теореме 2 (§ 7) ряд (3) также сходится, и притом абсолютно. Это позволяет нам расположить члены ряда (3) в любом порядке (не изменяя его суммы). Расположим их следующим образом:

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\ldots-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}-\ldots. \qquad (5)$$

Это есть геометрический ряд со знаменателем $q=-\frac{1}{3}$ Сумма ряда (5), а значит, и ряда (3) будет: $S=\frac{q}{1-q}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$.

2. О перестановке членов неабсолютно сходящегося ряда. Неабсолютно сходящиеся ряды переместительным свойством, вообще говоря, не обладают. Убедимся в этом на примере. Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots. \qquad (6)$$

Мы уже видели (§ 7), что этот ряд сходится, но неабсолютно. Обозначим его сумму через S.

Переставим члены исходного ряда (6) следующим образом: за первым положительным членом поставим два отрицательных члена, взятых в порядке их следования в данном ряде, затем поместим второй положительный член ряда, а затем опять два отрицательных в порядке их следования в ряде (6) и т. д. В результате такой перестановки членов получим следующий ряд:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots. \qquad (7)$$

Покажем, что ряд (7) хотя и сходится, но имеет сумму, вдвое меньшую, чем ряд (6). Будем обозначать n-е частичные суммы рядов (6) и (7) соответственно символами S_n и S'_n. Запишем частичную сумму ряда (7) с номером, кратным трем, и преобразуем ее:

$$S'_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right),$$

т. е. $S'_{3n} = \frac{1}{2} S_{2n}$, где через S_{2n} обозначена частичная сумма $2n$ первых членов ряда (6). Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$, то

$$\lim_{n\to+\infty} S'_{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} S_{2n}\right) = \frac{1}{2} S.$$

Итак, последовательность частичных сумм ряда (7) с номерами, кратными трем, сходится к числу $\frac{1}{2} S$. Но к тому же числу сходятся и последовательности частичных сумм ряда (7) с номерами, не делящимися на три; действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} S'_{3n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(S'_{3n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} S,$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_{3n+2} = \lim_{n\to+\infty}\left(S'_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2}\right) = \frac{1}{2} S.$$

Отсюда заключаем, что и вообще $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \frac{1}{2} S$, а это и означает, что ряд (7) сходится и сумма его, действительно, в два раза меньше суммы исходного ряда (6).

Рассмотренный нами пример показывает, что перестановка членов в неабсолютно сходящемся ряде может повлечь за собой изменение суммы данного ряда. Этот пример не является исключением. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Римана*). *В любом неабсолютно сходящемся ряде можно так переставить его члены, чтобы вновь полученный ряд имел наперед заданную сумму. Более того, можно так переставить члены такого ряда, чтобы новый ряд оказался вообще расходящимся.*

Теорема Римана, таким образом, устанавливает, что неабсолютно сходящиеся ряды не обладают переместительным свойством. На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем.

§ 9. УМНОЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

В § 2 мы рассмотрели почленное сложение и вычитание сходящихся рядов и почленное умножение сходящегося ряда на число. В этом параграфе рассмотрим вопрос об умножении ряда на ряд.

Пусть имеем два сходящихся ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots . \qquad (2)$$

Для конечных сумм имеет место дистрибутивный закон умножения. Следуя ему, составим всевозможные парные произведения $u_i v_k$ (i, k = 1, 2, ...) членов ряда (1) и ряда (2). Обозначим через

*) Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик.

$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ произведения $u_i v_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$, занумерованные*) в каком угодно порядке, и рассмотрим ряд

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots . \tag{3}$$

Для случая абсолютно сходящихся рядов имеем теорему.

Теорема (о почленном перемножении рядов). *Если ряды* (1) *и* (2) *абсолютно сходятся, то ряд* (3), *составленный из всех парных произведений* $u_i v_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$ *членов первого ряда на члены второго ряда, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится, и его сумма* W *равна произведению сумм* U *и* V *рядов* (1) *и* (2).

Доказательство. Так как по условию ряды (1) и (2) абсолютно сходятся, то ряды

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{4}$$

и

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| + \ldots + |v_n| + \ldots \tag{5}$$

являются сходящимися. Докажем, что в таком случае ряд

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \ldots + |w_n| + \ldots \tag{6}$$

тоже сходится.

Пусть W_n' — n-я частичная сумма этого ряда. Она состоит из членов вида $|u_i v_k|$. Среди индексов i и k таких членов, входящих в W_n', найдется наибольший индекс; обозначим его через m. Если мы теперь перемножим между собой почленно конечные суммы:

$$U_m' = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|, \quad V_m' = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|,$$

то в полученное произведение будут входить все члены $u_i v_k$ суммы W_n'. Поэтому в силу неотрицательности членов рядов (4) и (5) будем иметь:

$$W_n' \leqslant U_m' V_m'. \tag{7}$$

В правой части этого неравенства стоит произведение m-х частичных сумм положительных рядов (4) и (5). Так как эти ряды сходятся, то частичные суммы U_m' и V_n' (а стало быть, и их произведение) ограничены сверху. Но тогда в силу неравенства (7) частичные суммы W_n' положительного ряда (6) также ограничены сверху и, следовательно, ряд (6) сходится. Тем самым ряд (3) сходится абсолютно.

Остается доказать, что сумма W ряда (3) равна произведению сумм U и V рядов (1) и (2).

Так как ряд (3) абсолютно сходится, то в силу теоремы 1 § 8 его сумма W не зависит от порядка расположения членов $u_i v_k$

*) Очевидно, произведения $u_i v_k$ могут быть занумерованы хотя бы по способу постоянной суммы индексов.

в ряде (3). Пользуясь этим, а также теоремой 3 § 2, расположим их, например, «по правилу наибольшего индекса»:

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + \\ + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1) + \ldots . \qquad (8)$$

Здесь сначала записан (единственный) член u_1v_1, в котором наибольший индекс у членов рядов (1) и (2) равен единице, потом записана группа произведений тех членов этих рядов, у которых наибольший индекс равен двум (таких членов уже три), затем записана группа произведений тех членов, у которых наибольший индекс равен трем (таких членов пять), и т. д. Найдя сумму ряда (8), мы тем самым найдем и сумму ряда (3).

Обозначим через W_n частичную сумму ряда (8), заканчивающуюся группой членов с наибольшим индексом n, а через U_n и V_n — соответственно суммы n первых членов рядов (1) и (2). Тогда ясно, что $W_n = U_nV_n$, ибо всякий член u_iv_k, входящий в произведение $U_nV_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\cdot(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$, входит и в сумму W_n, как имеющий старший (из двух) индекс не выше, чем n, а, с другой стороны, каждое слагаемое u_iv_k суммы W_n найдется в составе произведения U_nV_n, поскольку $i \leqslant n$ и $k \leqslant n$.

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U$, а $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = V$, то, применяя теорему о пределе произведения переменных, находим: $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = UV$.

Таким образом, для суммы W ряда (3) имеем: $W = UV$, что и требовалось доказать.

Ряд, составленный из всевозможных произведений членов рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, называют *произведением* данных *рядов*.

На практике произведение рядов чаще всего представляется удобным записывать по правилу «постоянной суммы индексов»:

$$UW = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + \\ + u_3v_1) + \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots ,$$

т. е. в первую группу членов этого ряда, объединенных скобками, записываются произведения u_iv_k, у которых сумма индексов i и k равна двум, во вторую группу — произведения u_iv_k, у которых сумма индексов i и k равна трем, и т. д. Рассмотрим примеры.

Пример. Даны ряды

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots , \qquad (9)$$

$$1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \ldots + \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots , \qquad (10)$$

где a и b — известные числа.

Эти ряды абсолютно сходятся при любых a и b, так как при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a^n(n-1)!}{n!\,a^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a|}{n} = 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|b|}{n} = 0,$$

а при $a = 0$ или $b = 0$ это очевидно.

Обозначим суммы рядов (9) и (10) соответственно через A и B. Запишем ряд-произведение данных рядов по правилу «постоянной суммы индексов»:

$$1 + \left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1}\right) + \left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a}{1!}\frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!}\right) + \ldots + \left(\frac{a^k}{k!} + \frac{a^{k-1}b}{(k-1)!1!} + \ldots + \frac{b^k}{k!}\right) + \ldots,$$

или

$$1 + \frac{a+b}{1!} + \frac{(a+b)^2}{2!} + \ldots + \frac{(a+b)^k}{k!} + \ldots.$$

По доказанной теореме этот ряд абсолютно сходится, его сумма C равна произведению сумм данных рядов. Поэтому

$$C = A \cdot B = 1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \ldots + \frac{(a+b)^k}{k!} + \ldots.$$

Замечание. Для неабсолютно сходящихся рядов данное выше определение произведения рядов оказывается не вполне корректным: поведение вновь образованного ряда теперь уже зависит от порядка записи его членов (с. 41, 42), и так определенное произведение уже будет введено неоднозначно. В частности, при этом может случиться, что ряд-произведение вообще окажется расходящимся. Например, нетрудно убедиться, что ряд $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$ сходится, но не абсолютно, а ряд, представляющий произведение данного ряда на себя, расходится.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды обладают всеми основными свойствами конечных сумм, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих важных свойств не обладают, вследствие чего практическое применение этих рядов сильно ограничивается.

ГЛАВА II.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

В главе I мы рассматривали числовые ряды. Но в математическом анализе играют большую роль и функциональные ряды; они тесно связаны с функциональными последовательностями.

§ 10. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ СХОДИМОСТИ

Определение. *Если на некотором множестве G действительных чисел определена каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то говорят, что имеется последовательность функций или функциональная последовательность, заданная на множестве G; ее обозначают символом $\{f_n(x)\}$ или*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots . \tag{1}$$

При каждом фиксированном значении $x_0 \in G$ функциональная последовательность становится числовой. Если эта числовая последовательность сходится (расходится), то говорят, что функциональная последовательность (1) *сходится* (*расходится*) в точке x_0, а саму эту точку называют *точкой сходимости* (*расходимости*) последовательности (1). Если y_0 — предел указанной числовой последовательности, то это записывают так: $y_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$.

Множество D всех точек $x \in G$, в которых последовательность (1) сходится, называется *областью сходимости* этой последовательности; в таком случае говорят, что последовательность (1) сходится на множестве D (тот же оборот речи употребляют и для любого непустого подмножества D_1 множества D). В каждой точке $x_0 \in D$ последовательность $\{f_n(x)\}$ будет иметь соответствующий предел $y_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$, и если ставить каждому $x_0 \in D$ в соответствие это y_0, то тем самым на D может быть построена функция $f(x)$; ее называют *пределом* (для) *последовательности* $\{f_n(x)\}$. Записывают: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in D)$ и употребляют выражение: последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$.

Пример 1. Функциональная последовательность $\left\{\dfrac{1}{x^2+n}\right\}$ сходится для всех x, причем предельная функция ее будет:

$$y = f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0.$$

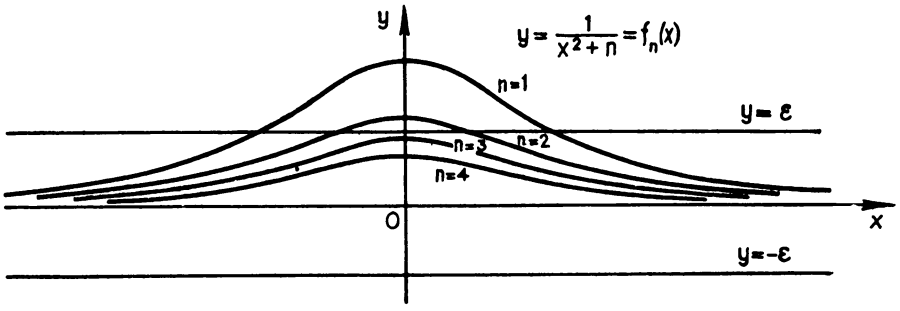


Рис. 1

На рисунке 1 изображены графики нескольких первых членов данной последовательности и ее предельной функции.

Пример 2. Для функциональной последовательности $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2+2}{nx^2+2n^2}$ при всяком x

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2x^2+2}{2n^2+nx^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2+\dfrac{2}{n^2}}{2+\dfrac{x^2}{n}}=\frac{x^2}{2},$$

и, значит, областью сходимости последовательности является интервал $(-\infty, +\infty)$, а предельной функцией: $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

Пример 3. Функциональная последовательность $\{nx\}$ имеет область сходимости, состоящую только из одной точки $x_0=0$, ибо при $x\neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}(nx)=\infty, \text{ а } \lim_{n\to+\infty}(nx_0)=\lim_{n\to+\infty}0=0.$$

Пример 4. Функциональная последовательность $\left\{\dfrac{n!}{x^2+n}\right\}$ расходится в каждой точке x: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{x^2+n}=\infty$ (при любом x), ее область сходимости — пустое множество.

Пример 5. Для функциональной последовательности $\{x^n\}$ точка $x_0=\dfrac{1}{2}$ есть точка сходимости: соответствующая числовая последовательность $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ значений ее членов сходится; предел y_0 последовательности $\{x^n\}$ в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$ равен нулю.

Та же последовательность будет расходящейся, например, в точке $x_0'=2$, так как последовательность $\{2^n\}$ расходится. Областью сходимости D последовательности $\{x^n\}$ будет полусегмент $(-1, 1]$*). При этом для $x\neq 1$ $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} x^n=0$, а для $x=1$ $f(1)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1)=\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$.

*) В интересах преемственности в настоящем томе сохранены такие же обозначения и названия числовых промежутков, как и в I томе.

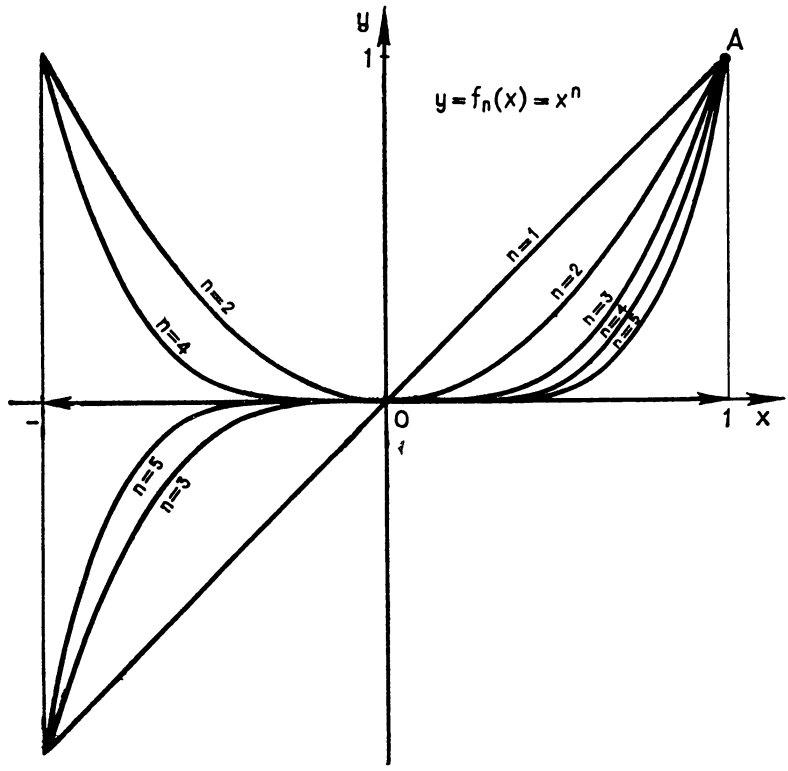


Рис. 2

Таким образом, предельная функция последовательности будет:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } -1 < x < 1, \\ 1 \text{ для } x = 1. \end{cases}$$

На рисунке 2 изображены графики нескольких первых членов последовательности $\{x^n\}$ и ее предельной функции (точка A (1; 1) — изолированная для графика функции $y = f(x)$).

§ 11. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1}$$

сходится на множестве D к некоторой функции $f(x)$, так что при каждом $x_0 \in D$ соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится (к числу $f(x_0)$). Это по определению сходимости числовой последовательности означает следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N_0, что для всех значений $n > N_0$ выполняется неравенство $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

При этом для взятого значения x_0 число N_0 зависит только от ε. Однако, если мы заменим здесь x_0 на какое-либо $x_0' \in D$, для того же самого ε неравенство $|f_n(x_0') - f(x_0')| < \varepsilon$ может уже не выполняться при некоторых $n > N_0$, если это число N_0 оставить прежним (хотя, разумеется, можно подобрать и для x_0' такое натуральное число N_0', что при $n > N_0'$ выполнится неравенство $|f_n(x_0') - f(x_0')| < \varepsilon$).

Возникает вопрос: нельзя ли указать по произвольно заданному $\varepsilon > 0$ натуральное число N (зависящее только от ε), одно и то же для всех x из D, такое, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех x из D?

Определение. *Последовательность $\{f_n(x)\}$, имеющая на данном множестве D предельную функцию $f(x)$, называется равномерно сходящейся на D (к функции $f(x)$), если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое фиксированное натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (2)$$

одновременно для всех x из D)*.

Если сходящаяся последовательность (1) не является равномерно сходящейся на множестве D, то говорят, что она сходится на D *неравномерно*. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального N найдутся натуральное число $n > N$ и $x_n \in D$, такие, что будет справедливо неравенство $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$.

Дадим введенным понятиям геометрическую интерпретацию.

Пусть последовательность (1) сходится равномерно, например, на некотором промежутке L. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно найти число $N = N(\varepsilon)$, такое, что при $n > N$ будет выполняться для всех x из L неравенство (2), т. е. будут справедливы неравенства: $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. Геометрически это означает: какой бы узкой ни была полоса (шириной в 2ε), охватывающая график предельной функции $y = f(x)$ на промежутке L и ограниченная кривыми $y = f(x) - \varepsilon$ и $y = f(x) + \varepsilon$, все кривые $y = f_n(x)$, изображающие геометрически функции данной последовательности (1), с некоторого номера $n > N = N(\varepsilon)$ попадают на промежутке L целиком в эту полосу (рис. 3).

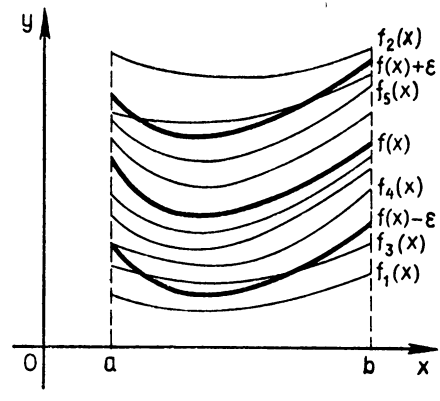


Рис. 3

*) Из определения следует, что равномерная сходимость будет иметь место на $D_1 \subset D$, если она имеет место на D.

Если же последовательность (1) на промежутке L сходится неравномерно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что, как бы велико ни было натуральное число N, найдется функция $y = f_n(x)$ с номером $n > N$ такая, что график ее будет выходить за пределы полосы между кривыми $y = f(x) - \varepsilon$ и $y = f(x) + \varepsilon$ (хотя бы частично).

Пример 1. Выяснить, сходится ли равномерно в своей области сходимости последовательность с общим членом $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n}$.

Р е ш е н и е. Эта последовательность сходится на $(-\infty, +\infty)$ к предельной функции $f(x) = 0$ (с. 46). Выясним характер этой сходимости.

Так как при любых n и x $0 < f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$, то при $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ будет выполняться неравенство $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ сразу для всех x. Таким образом, взятая последовательность сходится равномерно (рис. 1) (здесь можно взять $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ при $\varepsilon < 1$ и $N = 1$ при $\varepsilon \geqslant 1$).

Заметим, что здесь фактическое указание N необязательно: из неравенства $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ уже видно, что такое N (не зависящее от x) существует.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $\{x^n\}$, заданную на сегменте $[0; 1]$.

Р е ш е н и е. Для значений $x \in [0; 1]$ эта последовательность сходится, и ее предельная функция есть

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \neq 1, \\ 1 & \text{для } x = 1 \end{cases}$$

(ср. § 10, пример 5). Докажем, что сходимость эта уже неравномерная. Допустим противное. Положим, что по каждому $\varepsilon > 0$, например по $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, можно подобрать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - x^n| < \varepsilon$ одновременно для всех x из $[0; 1]$. Зафиксируем здесь n. В частности, это неравенство должно тогда выполняться и в точке $x_0 = \sqrt[n]{2\varepsilon}$: так как $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, то $\sqrt[n]{2\varepsilon} < 1$ и $x_0 \in [0; 1]$. Таким образом, должно быть: $\left|f(x_0) - x_0^n\right| < \varepsilon$. Между тем в действительности, поскольку $x_0 \neq 1$, $\left|f(x_0) - x_0^n\right| = \left|0 - x_0^n\right| = |0 - 2\varepsilon| = 2\varepsilon > \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{x^n\}$ на $[0; 1]$ сходится к своей функции $y = f(x)$ неравномерно.

Заметим, однако, что на любом сегменте $[0, a]$, содержащемся в полусегменте $[0; 1)$, эта последовательность сходится уже равномерно:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leqslant a^n \quad (0 < a < 1).$$

Выбирая теперь $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a}$, получим $a^n < \varepsilon$, а тогда при таком n и подавно будет $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех x из $[0; a]$ одновременно. (При этом $N = \left[\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a}\right]$, если $\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a} \geqslant 1$, и $N = 1$ — в противном случае.)

§ 12. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Непрерывность предельной функции. Пусть дана некоторая последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящаяся на данном множестве D к функции $f(x)$. При этом все функции $f_n(x)$ непрерывны на D. Означает ли это, что и предельная функция $f(x)$ непрерывна на D? Вообще говоря, на этот вопрос следует дать отрицательный ответ. Так, рассмотренная в предыдущем параграфе последовательность с общим числом $f_n(x) = x^n$ состояла из непрерывных функций, но сходилась на $[0; 1]$ к разрывной функции. Если, однако, добавить, например, требование равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$, то из непрерывности самих функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ действительно будет следовать и непрерывность предельной функции $f(x)$.

Теорема 1. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных на данном множестве D функций сходится на этом множестве к некоторой функции $f(x)$ равномерно, то и предельная функция $f(x)$ непрерывна на D.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка из D, а $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ можно указать такое натуральное число N, зависящее только от ε, что при $n > N$ будет выполняться для всех значений $x \in D$ неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

В частности, при $x = x_0$ получим из (1) (для $n > N$):

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Зафиксируем n в (1) и (2). Так как функция $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D$, то существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, для которых $|x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Из (1), (3) и (2) имеем при $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon,$$

а тогда, ввиду того что

$$|f(x) - f(x_0)| = |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x_0)] + [f_n(x_0) - f(x_0)]| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

и подавно при $|x - x_0| < \delta$ $(x \in D)$ будем иметь: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, а это и означает, что предельная функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in D$.

2. Интегрирование предельной функции. Пусть на сегменте $[a, b]$ дана сходящаяся последовательность непрерывных функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{4}$$

и $f(x)$ — ее предельная функция. Выясним некоторые условия, при которых возможен (при $n \to +\infty$) предельный переход под знаком интеграла $\int_a^b f_n(x)dx$, приводящий к интегрированию предельной функции, т. е. при которых выполняется условие

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Отметим, прежде всего, что равенство (5) вообще лишено смысла, если предельная функция $f(x)$ неинтегрируема. Однако оказывается, что равенство (5) может не иметь места и тогда, когда предельная функция не только вообще интегрируема, но и непрерывна. Так, если $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$, то $f_n(x)$ сходится к $f(x) = 0$: для $x = 0$ и $x = 1$ это очевидно, а для $0 < x < 1$ имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} [n^2x^n(1-x)] = (1-x) \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} =$$

$$= (1-x) \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\left(\frac{1}{x}\right)^n \ln\frac{1}{x}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(1-x)^{*)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n \ln^2\frac{1}{x}} = 0.$$

Далее,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2x^n(1-x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left[n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

в то время как

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq 1,$$

и равенство (5) не выполняется.

В следующей теореме указываются достаточные условия выполнимости равенства (5).

Теорема 2. (Правило перехода к пределу под знаком интеграла.) *Если последовательность* (4), *состоящая из непрерывных на данном сегменте* $[a, b]$ *функций, равномерно сходится на этом сегменте к некоторой функции* $f(x)$, *то имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] dx. \tag{6}$$

*) См. сноску на странице 25.

Доказательство. Прежде всего заметим, что по теореме 1 функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и потому $\int_a^b f(x)\,dx$ существует. Далее, в силу равномерной сходимости последовательности (4) при $n > N$ будет для всех x из указанного сегмента выполняться неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, где $\varepsilon > 0$ наперед задано, а $N = N(\varepsilon)$ по нему подобрано. Но в таком случае при $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx <$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon,$$

так что (при тех же n)

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что имеет место равенство (6).

Замечание. Условие равномерной сходимости не является необходимым для справедливости равенства (6). В самом деле, последовательность $\{x^n\}$ сходится на сегменте $[0, 1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \neq 1, \\ 1 & \text{для } x = 1 \end{cases}$$

неравномерно (см. с. 50). Однако $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} =$

$= 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$, т. е. равенство (6) справедливо.

3. Дифференцирование предельной функции. Пусть сходящаяся на области (или замкнутой области) D к некоторой функции $f(x)$ последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на D функций. Составим последовательность $\{f_n'(x)\}$. Возникает вопрос, сходится ли эта последовательность на D, и если да, то будет ли ее предельная функция производной от функции $f(x)$ (если эта производная вообще существует). Как и в предыдущем пункте, можно было бы привести примеры, показывающие, что в общем случае это не так.

Докажем теорему, дающую достаточные условия «перехода к пределу под знаком производной».

Теорема 3. *Если функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$:
1) *сходится на данном сегменте* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$;

2) *члены этой последовательности имеют на указанном сегменте непрерывные производные*;

3) *последовательность* $\{f_n'(x)\}$ *этих производных сходится на данном сегменте равномерно к некоторой функции* $F(x)$, *то имеет место соотношение:* $F(x) = f'(x)$, *т. е.*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]'. \tag{7}$$

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n'(x)\}$ равномерно сходится на сегменте $[a, b]$, то она равномерно сходится и на любом сегменте $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$ (см. сноску на с. 49), и мы можем применить к ней на $[a, x]$ теорему 2:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \int_a^x \left[\lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\right] dt = \int_a^x F(t)\,dt. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу того что функции $f_n'(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны на $[a, x]$, мы можем (при любом n) вычислить $\int_a^x f_n'(t)\,dt$ по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a). \tag{9}$$

Отсюда, поскольку по условию $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = f(x) - f(a). \tag{10}$$

Сопоставляя равенства (10) и (8), приходим к соотношению:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x F(t)\,dt. \tag{11}$$

Из условия теоремы следует (по теореме 1), что функция $F(t)$ непрерывна на сегменте $[a, x]$ и поэтому $\int_a^x F(t)\,dt$ есть дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Но тогда и функция, стоящая в левой части равенства (11), а тем самым и функция $f(x)$, дифференцируема и имеет на $[a, b]$ производную, причем

$$f'(x) = [f(x) - f(a)]' = \frac{d}{dx}\int_a^x F(t)\,dt = F(x).$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = F(x)$, а $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right]' = f'(x)$, то равенство (7) тем самым доказано.

§ 13. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА И ЕГО ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Составим символ вида:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

где $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — члены некоторой функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$. Этот символ называется *функциональным рядом*. Он кратко обозначается: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Члены последовательности $\{f_n(x)\}$ называются *членами ряда* (1), в частности, $f_n(x)$ называется *n-м его членом*, а при переменном n — *общим членом* ряда.

Например, записью $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$, где $f_n(x) = x^{n-1}$, или записью $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ представлен функциональный ряд.

Символу (1), как и в § 1, можно придать математический смысл. Назовем сумму n первых членов ряда (1) $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, а также функцию $S_1(x) = f_1(x)$ частичными суммами ряда (1) и рассмотрим последовательность $\{S_n(x)\}$ из этих частичных сумм.

Определение. *Если последовательность $\{S_n(x)\}$ с областью определения G имеет область сходимости D и сходится на D к некоторой функции $S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$, то ряд (1) называется сходящимся на множестве D, как и в каждой его точке, а функция $S(x)$ называется суммой этого ряда. При этом пишут:*

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots .$$

Таким образом,

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim_{n \to +\infty} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)].$$

Множество D — область сходимости последовательности $\{S_n(x)\}$ — называют *областью сходимости* ряда (1), а каждую точку сходимости (расходимости) этой последовательности — *точкой сходимости (расходимости)* самого ряда (1). В последнем случае говорят, что ряд (1) расходится в этой точке.

Для функциональных рядов справедливы следующие свойства, вытекающие из основных свойств числовых рядов.

1) если все члены ряда (1) умножить на отличное от нуля число или на одну и ту же, не принимающую нулевых значений и определенную в области сходимости ряда (1) функцию, то область сходимости ряда не изменится;

2) отбрасывание в функциональном ряде (1) или приписывание к нему нескольких членов (определенных в области сходимости ряда (1)) не изменяет области сходимости этого ряда (при неизменности области определения G).

Если в ряде (1) отбросить n первых членов ($n = 1, 2, \ldots$), то получится функциональный ряд:

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+k}(x) + \ldots, \qquad (2)$$

который носит название остатка ряда (1). Если при этом область определения ряда (2) остается той же, что и у ряда (1), то и область сходимости у (2) будет та же, что и у ряда (1).

Если ряд (1) сходится на данном множестве D и имеет суммой функцию $S(x)$, то ряд (2) будет на D, очевидно, иметь сумму $S(x) - [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]$, т. е. сумму $S(x) - S_n(x)$. Она обычно обозначается через $r_n(x)$:

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+k}(x) + \ldots.$$

При этом $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$.

Функциональный ряд (1) называется *абсолютно сходящимся в данной точке* x_0, если в этой точке соответствующий числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится абсолютно. Если ряд (1) сходится абсолютно в каждой точке данного множества, то он называется *абсолютно сходящимся на этом множестве*. Как следует из теоремы 2, § 7, ряд (1), абсолютно сходящийся на данном множестве D, сходится на D. Ясно также, что можно говорить и о неабсолютно сходящемся в данной точке (на данном множестве D) функциональном ряде.

Пример 1. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

Р е ш е н и е. Это—геометрический ряд. Как было выяснено (с. 7), он сходится только для всех x из интервала $(-1, 1)$, так что областью сходимости D данного функционального ряда является интервал $(-1, 1)$. Так как при замене в этом ряде каждого члена его абсолютной величиной мы получим при $|x| < 1$ ряд сходящийся, то исходный ряд сходится в указанной области абсолютно. Сумма этого ряда есть (с. 7) $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \sin nx$.

Р е ш е н и е. Зафиксируем здесь произвольным образом значение аргумента x. Составим вспомогательный числовой ряд с общим членом $v_n = \varphi_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. По признаку Даламбера при каждом x*) имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

*) Здесь $x \neq 0$. Но при $x = 0$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ очевидна. В дальнейшем подобной оговорки в аналогичных случаях делаться не будет.

а так как при любом x $\left|\frac{x^n}{n!}\sin nx\right| \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| = |v_n|$, то по теореме сравнения (§ 6) исследуемый ряд также сходится (и притом абсолютно) для всех x, так что область сходимости ряда — интервал $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда с общим членом $f_n(x) = n^2x^2$.

Р е ш е н и е. Зафиксируем здесь x; получим некоторый числовой ряд с общим членом $v_n = n^2x^2$. Так как при любом $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x^2 \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \infty$, то при $x \neq 0$ рассматриваемый ряд расходится. При $x = 0$ $v_n = f_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а потому и $S_n(0) = 0$; $S_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(0) = 0$ — ряд сходится. Таким образом, область сходимости этого ряда состоит лишь из одной точки $x = 0$.

Если мы здесь заменим x^2 на $x^2 + 1$, то получим функциональный ряд с общим членом $\varphi_n(x) = n^2(x^2 + 1)$, который, очевидно, расходится уже для всех x — область сходимости его — пустое множество.

Пример 4. Определить область сходимости и найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}.$$

Р е ш е н и е. Так как функция $f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не определена при $x = -n$ и $x = -(n+1)$, то мы будем исследовать этот ряд только в точках $x \neq -k$ (k — любое натуральное число). Поскольку $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n+x+1}$, то n-я частичная сумма ряда может быть представлена так:

$$S_n(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)} + \frac{1}{(2+x)(3+x)} + \ldots + \frac{1}{(n+x)(n+x+1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}.$$

Отсюда видно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ существует и $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x}$, т. е. рассматриваемый ряд сходится для всех $x \neq -k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и имеет суммой функцию $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

§ 14. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

1. Понятие равномерной сходимости ряда. Среди сходящихся функциональных рядов выделяются своей важностью так называемые равномерно сходящиеся ряды.

Пусть на некотором множестве D функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

сходится и имеет суммой функцию $S(x)$.

Определение 1. *Ряд* (1) *называется сходящимся на множестве* D *равномерно* (*неравномерно*), *если последовательность* $\{S_n(x)\}$ *его*

частичных сумм сходится на D к предельной функции $S(x)$ равномерно (неравномерно), т. е. если для любого (некоторого) $\varepsilon > 0$ можно (нельзя) указать такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ будет выполняться неравенство: $|r_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in D$.

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ для значений $x > -1$.

Решение. Данный ряд сходится для $x > -1$ (§ 13, пример 4). Для него $S(x) = \frac{1}{1+x}$, $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}$ и, следовательно, $r_n(x) = \frac{1}{n+x+1}$.

Так как по условию $x+1>0$, то $|r_n(x)| < \frac{1}{n}$. Отсюда ясно, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, мы можем взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (или 1, если $\varepsilon > 1$), и тогда при $n > N$ будем иметь: $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $|r_n(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ одновременно для всех $x > -1$, т. е. рассматриваемый ряд сходится для этих x равномерно.

Пример 2. Исследовать в интервале $(-\infty, +\infty)$ на равномерную сходимость ряд с общим членом $f_n(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{x^2+n}$.

Решение. Так как при любом фиксированном x числовой ряд с общим членом $v_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{x^2+n}$ является рядом Лейбница (с. 31), то исследуемый ряд сходится и для его остатка имеем:

$$|r_n(x)| < |v_{n+1}| = \frac{1}{x^2+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

каково бы ни было число x. Взяв теперь по заданному $\varepsilon > 0$ натуральное число n при условии $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, мы получим сразу для всех x: $|r_n(x)| < \varepsilon$, т. е. исследуемый ряд сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что этот ряд не является абсолютно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$: ряд с общим членом $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ расходится при любом x, что следует из его сравнения (с. 20) с расходящимся гармоническим рядом: если $w_n = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x^2+n} = 1 \neq 0$.

Пример 3. Для ряда $x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ на $[0, 1]$ последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\} = \{x^n\}$ сходится на этом сегменте неравномерно (с. 50), а потому и сам этот ряд на $[0, 1]$ сходится неравномерно, и притом к разрывной функции (см. там же).

Отметим, что, очевидно, любой сходящийся числовой ряд можно рассматривать как равномерно сходящийся функциональный ряд.

2. Признаки равномерной сходимости ряда. Формулировка одного из таких признаков (Вейерштрасса) использует понятие мажорируемого ряда. Введем это понятие.

Определение 2. *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *называется мажорируемым на данном множестве* D *(на котором функции* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *определены), если существует такой числовой знакоположительный сходящийся ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *что члены ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *(хотя бы начиная с некоторого) при всех* $x \in D$ *не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *т. е.* $|f_n(x)| \leqslant u_n$.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Если функциональный ряд* (1) *мажорируем на данном множестве* D, *то он равномерно и абсолютно сходится на этом множестве.*

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его остаток $\rho_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Поэтому для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать натуральное N так, что при $n > N$ будет выполняться неравенство: $\rho_n < \varepsilon$. Составим теперь (при произвольном натуральном n) ряд

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+k}(x) + \ldots \qquad (2)$$

и, зафиксировав в нем по произволу x $(x \in D)$, сравним его с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$. Так как по условию $|f_{n+k}(x)| \leqslant u_{n+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$*), то ряд (2) сходится, и притом абсолютно (§ 7), причем для его суммы $r_n(x)$ имеем: $|r_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ (см. там же), т. е. $|r_n(x)| \leqslant \rho_n$, откуда при $n > N = N(\varepsilon)$, учитывая неравенство $\rho_n < \varepsilon$, получим: $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in D$. Отсюда следует (по определению, с. 57), что ряд (1) равномерно и абсолютно сходится на D.

Пример 4. Доказать, что при $|x| \geqslant q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + x^{4n}}$ равномерно сходится.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем: $\left|\frac{x}{1 + x^{4n}}\right| < \frac{|x|}{|x|^{4n}} < \frac{1}{q^{4n-1}}$ (для $x = 0$ не-

*) По свойству 2 функциональных рядов (с. 55) мы можем, не нарушая общности, считать, что условие $|f_n(x)| \leqslant u_n$ в D выполняется уже начиная с $n = 1$.

равенство $\left|\frac{x}{1+x^{4n}}\right| < \frac{1}{q^{4n-1}}$ очевидно). Так как геометрический ряд со знаменателем $\frac{1}{q^4} < 1$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится для $|x| \geqslant q > 1$.

Признак Вейерштрасса дает только достаточное условие равномерной сходимости функционального ряда, оно не является необходимым. Так, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{x^2+n}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$ (с. 58), однако признак Вейерштрасса к нему неприменим, ибо этот ряд заведомо не мажорируем: все мажорируемые ряды сходятся абсолютно, между тем как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится при любом x (см. там же). Существует, однако (приводимый здесь без доказательства), необходимый и достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда — признак Коши: *для того чтобы функциональный ряд* (1) *был равномерно сходящимся на данном множестве* D, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *можно было указать натуральное число* N *так, чтобы при* $n > N$ *и* $m > N$ *выполнялось одновременно для всех* $x \in D$ *неравенство*:

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon. \tag{8}$$

§ 15. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1. Непрерывность суммы ряда. Пусть члены сходящегося на данном множестве D функционального ряда

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{1}$$

— непрерывные функции на D. Как и в случае функциональных последовательностей (§ 12), возникает вопрос о непрерывности суммы ряда. В общем случае ее не будет (§ 14, пример 3), но при условии равномерной сходимости ряда (1) ответ будет утвердительным.

Теорема 1 (о непрерывности суммы ряда). *Если ряд* (1), *члены которого являются непрерывными на данном множестве* D *функциями, сходится на* D *равномерно, то сумма* $S(x)$ *этого ряда является функцией, непрерывной на множестве* D.

Доказательство. Пусть $\{S_n(x)\}$ — последовательность частичных сумм ряда (1). По условию она равномерно сходится на D к функции $S(x)$. Кроме того, $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, как сумма непре-

рывных на D функций, есть функция непрерывная на D. Отсюда по теореме 1 из § 12 предельная функция $S(x)$ этой последовательности, т. е. сумма ряда (1), будет непрерывной на D функцией.

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2+3^n x}}{(n-1)!}$ в промежутке $[0, a]$ $(a > 0)$ сходится и сумма его — непрерывная функция.

Р е ш е н и е. Для вспомогательного ряда с общим членом $a_n = \frac{\sqrt{2+3^n a}}{(n-1)!}$ имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2+3^{n+1}a}\,(n-1)!}{n!\,\sqrt{2+3^n a}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{\frac{2}{3^n}+3a}{\frac{2}{3^n}+a}} \cdot \frac{1}{n} \right) = 0 < 1,$$

и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Но для любого x из $[0, a]$ общий член u_n данного ряда не больше по абсолютной величине $(u_n > 0)$ общего члена вспомогательного сходящегося знакоположительного ряда: $|u_n| \leqslant a_n$, т. е. исследуемый ряд мажорируем на $[0, a]$, а потому он сходится равномерно на нем. Члены этого ряда — непрерывные функции (вообще и на $[0, a]$ в частности). Тогда по доказанной теореме 1 сумма этого ряда есть функция, непрерывная на $[0, a]$.

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что условие равномерной сходимости ряда не является необходимым для того, чтобы ряд сходился к непрерывной функции (это можно проиллюстрировать на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

2. Интегрирование функциональных рядов. Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные на данном сегменте $[a, b]$ функции, который на $[a, b]$ сходится и имеет сумму $S(x)$. Нередко нужно знать, существует ли интеграл $\int_a^b S(x)\,dx$ и можно ли его вычислить путем почленного интегрирования исходного ряда. В одном, часто встречающемся случае это заведомо возможно.

Теорема 2 (о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда). *Если на данном сегменте $[a, b]$ ряд (1), члены которого — непрерывные на $[a, b]$ функции, сходится равномерно и имеет суммой некоторую функцию $S(x)$:*

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \qquad (2)$$

то справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \ldots . \quad (3)$$

Доказательство. Так как функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны, то интегралы $\int_a^b f_n(x)\,dx$ существуют. Обозначим n-ю частичную сумму ряда из (3) через $\sigma_n(x)$:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) dx = \int_a^b S_n(x)\,dx,$$

где $S_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (1).

Здесь функции $S_n(x)$ в условии теоремы непрерывны на $[a, b]$, а последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме $S(x)$ ряда (1), тогда по теореме 2 (§ 12) последовательность $\{\sigma_n(x)\}$, т. е. $\left\{\int_a^b S_n(x)\,dx\right\}$, сходится к $\int_a^b S(x)\,dx$. Следовательно, ряд из (3) сходится на $[a, b]$ и имеет суммой число $\int_a^b S(x)\,dx$. Теорема доказана.

Равенству (3) можно придать, учитывая (2), и такую форму:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \ldots,$$

т. е. в условиях теоремы правило интегрирования конечных сумм распространяется и на интегрирование «сумм с бесконечным числом слагаемых».

Замечание 1. Если условие равномерной сходимости ряда (1) нарушено, то утверждение о почленном интегрировании ряда, вообще говоря, окажется неверным.

Замечание 2. Если в условии теоремы 2 указание на сегмент $[a, b]$ заменить указанием на интервал (α, β) (полусегмент $[\alpha, \beta)$ или $(\alpha, \beta]$), то, очевидно, равенство (3) останется в силе, если теперь в нем под a и b понимать любые действительные числа из этого интервала (полусегмента).

Пример 2. Показать, что в интервале $(-1, +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ можно почленно интегрировать и выполнить это интегрирование.

Р е ш е н и е. В указанном промежутке члены данного ряда являются непрерывными функциями, и этот ряд равномерно сходится в $(-1, +\infty)$; его сумма есть $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (см. § 13 и 14). Поэтому рассматриваемый ряд по замечанию 2 допускает почленное интегрирование в любом конечном интервале, внутреннем к данному. В частности, по (3) получаем:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)},$$

а так как

$$\int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)} = \int_0^x \left(\frac{1}{n+t} - \frac{1}{n+1+t}\right) dt = \ln(n+x) -$$

$$- \ln(n+1+x) - [\ln n - \ln(n+1)] = \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} \text{ и}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),$$

то имеем (для $x > -1$):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}.$$

3. Дифференцирование функциональных рядов. Следующая теорема дает достаточное условие почленного дифференцирования ряда.

Теорема 3. *Если на данном сегменте* $[a, b]$:

1) *ряд*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

сходится и имеет сумму $S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$;

2) *члены ряда* (1) *имеют непрерывные производные и*

3) *ряд, составленный из производных членов данного ряда, сходится равномерно, то функция* $S(x)$ *— сумма ряда* (1) *— имеет на* $[a, b]$ *производную* $S'(x)$ *и выполняется равенство*:

$$S'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots, \qquad (6)$$

т. е.

$$[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначая n-ю частичную сумму ряда (1) через $S_n(x)$, а n-ю частичную сумму ряда

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots \qquad (7)$$

через $\sigma_n(x)$, мы находим для $x \in [a, b]$:

$$S_n'(x) = [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) = \sigma_n(x).$$

Функции $\sigma_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) непрерывны на сегменте $[a, b]$, как суммы непрерывных на $[a, b]$ (по условию) функций. Кроме того, по условию ряд (7) сходится на $[a, b]$ равномерно, следовательно, по определению равномерной сходимости ряда (§ 14) последовательность $\{\sigma_n(x)\}$, или, что то же, последовательность $\{S_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Но в таком случае к сходящейся последовательности $\{S_n(x)\}$ применима (на $[a, b]$) теорема о дифференцировании предельной функции (§ 12): $S'(x)$ существует, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'(x) = (\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x))' = S'(x)$, откуда, ввиду того что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n(x)$ есть сумма $\sigma(x)$ ряда (7), мы можем записать: $\sigma(x) = S'(x)$, или $S'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$, и равенство (6) доказано.

При этом по той же теореме из § 12 сходимость последовательности $\{S_n(x)\}$, а значит, и ряда (1) также здесь обязана быть равномерной на $[a, b]$.

Замечание 4. Если условия теоремы выполняются на каком-либо интервале (α, β) или они выполняются хотя бы на любом сегменте $[a, b]$, внутреннем к этому интервалу, и так как любую точку интервала можно всегда заключить в некоторый, целиком помещающийся в этом интервале сегмент, то равенство (6) будет иметь место и в этом случае для всех точек из интервала (α, β) (только сходимость ряда (1) в последнем случае уже не обязательно будет равномерной на (α, β)).

Заметим также, что указанное условие почленного дифференцирования ряда не является необходимым. На соответствующих примерах мы останавливаться не будем.

ГЛАВА III.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

§ 16. ПОНЯТИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА. ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ

Из функциональных рядов особенно хорошо изучены и богаты приложениями степенные ряды.

1. Определение. *Функциональный ряд вида*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots , \qquad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, ... , a_{n-1}, ... — *некоторые числа, называется степенным рядом; числа* a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *называют коэффициентами этого ряда.*

Степенные ряды уже встречались нам ранее. Так, хорошо известный геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ (§ 13), как и ряд примера 3 из § 15, — степенные ряды.

Отметим, что, поскольку в (1) те или иные коэффициенты могут равняться нулю, в этом ряде фактически могут быть представлены не все целые неотрицательные степени аргумента x, а лишь некоторые, например четные. Так, ряд $1 + 2x^2 + 3x^4 + \ldots + nx^{2n-2} + \ldots$ является степенным (здесь $a_{2k} = k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $a_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Заметим, что обычно под степенным рядом понимают функциональный ряд более общего вида:

$$a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots + a_{n-1}(x - c)^{n-1} + \ldots , \qquad (*)$$

где c, a_0, a_1, ... , a_{n-1}, ... — некоторые числа. Ряд (1) получается из ряда (*) при $c = 0$.

Поскольку изучение поведения степенного ряда (*) может быть сведено (с помощью замены переменной $x - c$ на переменную x) к изучению поведения ряда (1), то только последний и будет в этом параграфе служить объектом нашего рассмотрения.

2. Область сходимости степенного ряда. Прежде всего заметим, что любой степенной ряд (1) сходится в точке $x = 0$. Как показывает пример 3 (§ 13), в отдельных случаях этот ряд может не иметь других точек сходимости. С другой стороны, существуют степенные ряды, сходящиеся в $(-\infty, +\infty)$ (или, как говорят, всюду) (см. ниже пример 1). В иных случаях (пример 1, § 13) степенной ряд может иметь областью сходимости некоторый конечный промежуток. Это не случайно: для степенных рядов, как мы вскоре уста-

новим, область сходимости всегда является некоторым промежутком (или одной точкой). Чтобы убедиться в этом, докажем сначала теорему о точках сходимости степенного ряда.

Теорема 1 (А б е л я). *Если степенной ряд**) (1) *сходится в некоторой точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится, и притом абсолютно, и во всех точках* x, *для которых* $|x| < |x_0|$; *если же этот ряд расходится в некоторой точке* x_1, *то он расходится и во всех точках* x, *для которых* $|x| > |x_1|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд (1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, т. е. является сходящимся числовой ряд:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots . \tag{2}$$

Выберем тогда какое-либо значение x при условии $|x| < |x_0|$ и зафиксируем его в (1). Для этого значения x составим также следующий вспомогательный ряд:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots . \tag{3}$$

Так как ряд (2) сходится, то $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n x_0^n) = 0$ и потому существует такое число $K > 0$, что $|a_n x_0^n| < K$ для всех значений n. Отсюда

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Но числовой ряд

$$K + K\left|\frac{x}{x_0}\right| + K\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + K\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

есть геометрический ряд, знаменатель которого $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, и, следовательно, есть ряд сходящийся. Отсюда в силу (4) ряд (3) по теореме сравнения рядов также сходится, а это, в свою очередь, означает, что (при выбранном x ($|x| < |x_0|$)) сходится, и притом абсолютно, ряд (1).

Пусть теперь существует значение x_1, для которого ряд (1) расходится, тогда он будет расходиться и для всякого значения x, для которого $|x| > |x_1|$. Действительно, если бы при некотором $x = x_0$, при котором $|x_0| > |x_1|$, ряд (1) был сходящимся, то он, в силу неравенства $|x_1| < |x_0|$, оказался бы по только что доказанному сходящимся и в точке x_1, что невозможно по самому ее выбору.

Теорема 2. *Если ряд* (1) *сходится более чем в одной точке, но не всюду, то существует такое действительное число* R, *что ряд* (1) *сходится* (*и притом абсолютно*) *в интервале* $(-R, R)$, *т. е. при* $|x| < R$, *и расходится вне сегмента* $[-R, R]$, *т. е. при* $|x| > R$.

---

*) Здесь и в дальнейшем мы будем в целях удобства брать в большинстве случаев в качестве общего члена ряда (1) не его n-й член, $a_{n-1}x^{n-1}$, а его $(n+1)$-й член, $a_n x^n$, что при переменном n допустимо.

Доказательство. Так как ряд (1) сходится более чем в одной точке, то существует такая точка $x_0 \neq 0$, в которой ряд сходится. Однако ряд этот сходится не всюду, и, значит, существует такая точка x_1, в которой ряд расходится. Так как при $|x| > |x_1|$ ряд также расходится в точке x (теорема Абеля), то имеем для любой такой точки x_0, что $|x_0| \leqslant |x_1|$, а потому и подавно $x_0 \leqslant |x_1|$, т. е. множество D_0 точек сходимости ряда (1) ограничено сверху. Но тогда оно имеет верхнюю грань. Обозначим ее через R. Покажем, что R и есть требуемое теоремой число.

Прежде всего $R > 0$, ибо в D_0 обязательно есть положительные числа: ряд сходится при $|-x| = |x| < |x_0|$, а из чисел x и $-x$ ($x \neq 0$) одно непременно положительно. Пусть, далее, число x взято при условии: $|x| < R$ (x — фиксировано). Обозначим: $\varepsilon = R - |x|$ ($\varepsilon > 0$). По определению верхней грани во множестве D_0 существует такая точка $\bar{x}_0$, что $\bar{x}_0 > R - \varepsilon$, т. е. такая, что $|\bar{x}_0| > |x|$, откуда $|x| < |\bar{x}_0|$. Но $\bar{x}_0 \in D_0$, и потому есть точка сходимости ряда (1), а тогда из неравенства $|x| < |\bar{x}_0|$ по теореме Абеля следует, что ряд (1) сходится при выбранном x, и притом абсолютно.

Пусть теперь $|x| > R$. Выберем число x' при условии: $|x| > x' > R$. Так как R — верхняя грань множества D_0, то для любой точки сходимости $\bar{x}$ ряда (1) должно быть $\bar{x} \leqslant R$, между тем как $x' > R$. Поэтому ряд (1) расходится в точке x', а значит (теорема Абеля), он расходится и для тех x, для которых $|x| > |x'| = x'$. Таким образом, при $|x| > R$ ряд (1) расходится. Теорема доказана.

Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (1). Число R при этом называют *радиусом сходимости* этого ряда.

Так, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ (§ 13, пример 1) сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, а потому интервалом сходимости этого ряда является интервал $(-1, 1)$; радиус сходимости его $R = 1$.

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ ($a_0 = 0$) сходится при $|x| < \frac{1}{2}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{2}$ (признак Даламбера) — интервал сходимости ряда есть $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}$.

В целях большей общности степенным рядам, всюду сходящимся, а также степенным рядам, сходящимся только в одной точке $x_0 = 0$, тоже принято приписывать радиус и интервал сходимости: в первом случае говорят, что радиус сходимости $R = \infty$, а во втором — что $R = 0$. Соответственно в первом случае говорят, что интервал сходимости ряда есть $(-\infty, +\infty)$, а во втором, что он состоит из одной точки ($x = 0$). При таких дополнительных согла-

шениях мы можем сказать, что *всякий степенной ряд имеет интервал сходимости*, и (как легко доказать) только один.

В доказанной выше теореме говорится, что при $|x| < R$ ряд (1) сходится, а при $|x| > R$ он расходится, но в ней ничего не сказано о поведении этого ряда в точках $x = \pm R$. В каждой из этих точек (или, как говорят, на концах интервала сходимости ряда) различные степенные ряды могут вести себя по-разному. Так, в примере 1 (§ 13) ряд расходился на обоих концах интервала сходимости, в то время как в примере с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ (см. выше) ряд сходится на левом конце интервала сходимости, но расходится на его правом конце.

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится на обоих концах своего интервала: применяя к этому ряду (при фиксированном x) признак абсолютной сходимости Даламбера, легко найдем, что он имеет интервал сходимости $(-1, 1)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, а следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ (§ 7), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится при $x = \pm 1$ и его область сходимости есть сегмент $[-1, 1]$.

Таким образом, в общем случае необходимо различать интервал сходимости и область сходимости степенного ряда.

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы вытекает, что и всякий степенной ряд общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ имеет интервал сходимости $(c - R, c + R)$, где R — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Разыскание интервала сходимости (абсолютной) степенного ряда (1) часто может быть проведено применением к нему при произвольном фиксированном x того или иного признака абсолютной сходимости, например признака Даламбера или Коши. Для разыскания области сходимости ряда дополняют нахождение интервала сходимости исследованием поведения ряда на концах этого интервала.

Пример 1. Установить область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Р е ш е н и е. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

для всех x. Отсюда радиус сходимости данного степенного ряда $R = \infty$ и область сходимости этого ряда есть $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}x^{n-1}$.

Р е ш е н и е. Имеем: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+2)}x$. Рассмотрим функцию $\frac{\ln(z+1)}{\ln(z+2)}x$ непрерывного аргумента z. Для нее по правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{x\ln(z+1)}{\ln(z+2)} = \lim_{z\to+\infty}\frac{x\frac{1}{z+1}}{\frac{1}{z+2}} = x\lim_{z\to+\infty}\frac{z+2}{z+1} = x,$$

а потому $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$, и, значит, ряд при $|x| < 1$ сходится, а при $|x| > 1$ расходится, интервал сходимости ряда есть $(-1,1)$.

При $x = -1$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\ln(n+1)}$, подчиняющийся условиям теоремы Лейбница, — ряд сходится. При $x = 1$ получаем числовой ряд с общим членом $\bar{u}_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$.

Если $v_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, то $\lim_{n\to+\infty}\frac{\bar{u}_n}{v_n} = 1$ (следствие 1, § 6), и вместо исследования на сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n$ можно исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

К последнему применим интегральный признак Коши (гл.I, § 6): $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ — непрерывная неотрицательная убывающая функция для $x \geqslant 1$ и $f(n) = v_n$. Но $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^{\infty} = +\infty$, и, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится, а потому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n$ расходится.

Итак, область сходимости исследуемого ряда есть $[-1, 1)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n x^n$.

Решение. Так как $K=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n|x|^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+4}{5n+7}|x|\right)=$ $=\frac{2}{5}|x|$, то $R=\frac{5}{2}$ и $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ — интервал сходимости ряда. При $x=$ $=\pm\frac{5}{2}$ для общего члена исследуемого ряда имеем: $|u_n|=\left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n\left(\frac{5}{2}\right)^n$. Так как $\frac{2n+4}{5n+7}>\frac{2}{5}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, то $|u_n|>1$ и соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ не может выполняться. Таким образом, на концах интервала сходимости исследуемый ряд расходится и его область сходимости совпадает с его интервалом сходимости.

§ 17. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1. Равномерная сходимость степенного ряда. ***Теорема 1.*** *На всяком сегменте* $[-\rho,\ \rho]$, *лежащем целиком внутри интервала сходимости* $(-R,\ R)$ *степенного ряда*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

(т. е. при $|x|\leqslant\rho<R$*), этот ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть $x\in[-\rho,\ \rho]$, тогда $|x|\leqslant\rho<R$ и $|a_nx^n|\leqslant|a_n\rho^n|$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Но $0<\rho<R$, и потому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\rho^n$ абсолютно сходящийся (§ 16, теорема 2), и, значит, ряд (1) для указанных x, т. е. на $[-\rho,\ \rho]$, мажорируем, а, следовательно, по признаку Вейерштрасса (§ 14) он является равномерно сходящимся на этом сегменте.

2. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Рассмотрим вопрос о применимости к степенным рядам теорем 2 и 3 (§ 15).

Теорема 2. *Степенной ряд* (1) *с радиусом сходимости* R *на любом сегменте* $[0,\ x]$*), где* $|x|<R$, *можно интегрировать почленно, так что если*

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots,$$

то

$$\int_0^x S(x)\,dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots. \qquad (2)$$

Доказательство. Так как $|x|<R$, то сегмент $[0,\ x]$, целиком лежит внутри интервала сходимости ряда (1) и потому (теорема 1) этот ряд равномерно сходится на $[0,\ x]$. Кроме того, члены ряда (1) — непрерывные функции. Но тогда по теореме о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов (§ 13)

*) При $x<0$ запись $[0,\ x]$ условно употребляется здесь вместо записи $[x,0]$.

и степенной ряд из правой части (2) сходится на $[0, x]$, причем имеет место и само равенство (2).

Попутно мы установили, что степенной ряд из (2) сходится для любого $x \in (-R, R)$, т. е. что его интервал сходимости во всяком случае не у́же, чем у исходного ряда (1).

Теорема 3. *Степенной ряд*

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \tag{3}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (1), *имеет тот же интервал сходимости, что и ряд* (1), *причем для всех x из этого интервала сходимости справедливо равенство*:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \tag{4}$$

где $S(x)$ — сумма ряда (1).

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (1), а R' — радиус сходимости ряда (3).

Докажем сначала, что $R' = R$, т. е. что ряды (1) и (3) имеют один и тот же интервал сходимости. С этой целью прежде всего установим, что ряд (3) сходится для всех $|x| < R$, т. е. что $R' \geqslant R$. Пусть $x \in (-R, R)$. Выберем число ρ при условии $|x| < \rho < R$ и обозначим $\frac{|x|}{\rho}$ через q: $q = \frac{|x|}{\rho} < 1$. Тогда

$$|na_nx^{n-1}| = |na_n|\, q^{n-1}\rho^{n-1} = nq^{n-1}\frac{1}{\rho}|a_n\rho^n|. \tag{4'}$$

Легко обнаружить (например, воспользовавшись признаком Даламбера), что, поскольку $0 \leqslant q < 1$, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ сходится, а тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}(nq^{n-1}) = 0$. Поэтому с некоторого номера n будет выполняться неравенство $nq^{n-1} < \rho$, и для таких n из (4′) будем иметь:

$$|na_nx^{n-1}| \leqslant |a_n\rho^n|^{*}). \tag{5}$$

Но $\rho \in (-R, R)$, и потому ряд (1) есть абсолютно сходящийся при $x = \rho$. Отсюда по (5) заключаем, что ряд (3) сходится (и притом абсолютно) при всяком $x \in (-R, R)$.

Итак, мы доказали, что радиус сходимости степенного ряда не может уменьшаться при дифференцировании этого ряда: $R' \geqslant R$. Докажем, что он не может при этом и увеличиваться. Допустим от противного, что $R' > R$. Выбрав тогда число x_1 при условии $R' > x_1 > R$, мы найдем, что ряд (3) можно почленно интегрировать на $[0, x_1]$, получая при этом по предыдущей теореме сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$. Но это невозможно: при $x_1 > R$ ряд (1) расходится.

---

*) Знак равенства сохранен на случай, если $a_n = 0$ для взятого n.

Полученное противоречие и доказывает, что $R' = R$, т. е. что ряды (1) и (3) имеют одинаковые интервалы сходимости.

Пусть теперь x — произвольная точка из $(-R, R)$. Взяв число ρ_1 при условии: $|x| < \rho_1 < R$, мы получим, что, во-первых, ряд (3) равномерно сходится на $[-\rho_1, \rho_1]$ (теорема 1), во-вторых, что $x \in [-\rho_1, \rho_1]$. Но в таком случае для ряда (1) на $[-\rho_1, \rho_1]$ выполняются все условия теоремы о почленном дифференцировании функциональных рядов (§ 15) (ибо условие сходимости ряда (1) на $[-\rho_1, \rho_1]$, а также условие непрерывности производных его членов выполняются здесь тривиальным образом). Тогда для любого значения x из этого сегмента и, в частности, для x, выбранного нами, заключаем на основании указанной теоремы, что существует производная $S'(x)$ суммы $S(x)$ ряда (1) и выполняется равенство (4).

Следствие 1. *При почленном интегрировании степенного ряда* (1) *интервал сходимости его не изменяется.*

Действительно, пусть ряд из правой части (2) имеет интервал сходимости $(-\bar{R}, \bar{R})$. По доказанной теореме 3 ряд, полученный из него почленным дифференцированием, имеет тот же интервал сходимости. Но полученный таким образом ряд есть исходный ряд (1) с интервалом сходимости $(-R, R)$, следовательно, $\bar{R} = R$.

Следствие 2. *В своем интервале сходимости* $(-R, R)$ *степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можно последовательно дифференцировать сколько угодно раз, т. е., как говорят, в* $(-R, R)$ *сумма этого ряда есть бесконечно дифференцируемая функция.*

В самом деле, после однократного дифференцирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ с суммой $S(x)$ получится степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ с тем же интервалом сходимости $(-R, R)$ и с суммой $S'(x)$. Его можно снова почленно дифференцировать в $(-R, R)$, получая степенной ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, у которого снова интервал сходимости есть $(-R, R)$, а сумма равна $[S'(x)]' = S''(x)$ и т. д.

Замечание. Мы видели, что при почленном дифференцировании или интегрировании степенного ряда интервал сходимости его не изменяется. Однако не следует думать, что при этом не изменяется и область сходимости ряда: поведение ряда (1) и ряда из (2) или ряда (1) и ряда из (4) на концах интервала сходимости (т. е. при $x = \pm R$) может быть различным. Так, при интегрировании степенного ряда (1), как нетрудно видеть, область сходимости не может сузиться. Но она может расшириться. Например, степенной ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \ldots \qquad (6)$$

имеет областью сходимости свой интервал сходимости $(-1, 1)$, в то время как ряд, полученный от его почленного интегрирования,

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (7)$$

имеет своей областью сходимости уже сегмент $[-1, 1]$ (§ 7, признак Лейбница).

Напротив, при дифференцировании степенного ряда область его сходимости может сузиться (см. только что взятый пример, рассмотренный в обратном порядке: от ряда (7) к ряду (6)).

Пример. Найти сумму ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n-2)(n-1)n} + \ldots \qquad (8)$$

($n = 3, 4, \ldots$; первые два члена ряда выпадают из общего закона).

Р е ш е н и е. Не определяя пока интервала сходимости $(-R, R)$ ряда (8), продифференцируем его дважды в этом интервале. В результате получим ряд:

$$0 + 1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n-2}}{n-2} + \ldots \qquad (9)$$

($n = 3, 4, \ldots$; снова первые два члена выпадают из общего закона). Отбрасывая в (9) первые два члена, мы узнаем в полученном ряде ряд из примера 3 § 15, интервал сходимости которого есть $(-1, 1)$, а сумма равна $\ln(1 + x)$ (см. там же). Но тогда ряд (9) имеет тот же интервал сходимости и сумма его равна $1 + \ln(1 + x)$:

$$1 + \ln(1 + x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x < 1).$$

Если теперь $\sigma(x)$ есть сумма ряда (9), то $\sigma(x)$ является второй производной от суммы $S(x)$ ряда (8): $\sigma(x) = S''(x)$. Отсюда

$$S'(x) = \int [1 + \ln(1 + x)]\,dx = (x + 1)\ln(1 + x) + C. \qquad (10)$$

Определим постоянную C. Дифференцируя почленно в интервале $(-1, 1)$ равенство

$$S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}x^{n+2},$$

мы придем к равенству:

$$S'(x) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

из которого находим $S'(0) = 1$. Однако из (10) следует: $S'(0) = C$. Таким образом, $C = 1$ и $S'(x) = (x + 1)\ln(x + 1) + 1$. Отсюда, далее, имеем:

$$S(x) = \int [(x + 1)\ln(x + 1) + 1]\,dx = \frac{1}{2}(x + 1)^2\ln(x + 1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + x + C_1.$$

Так как, с одной стороны, $S(0) = -\frac{1}{4} + C_1$, а, с другой, из (8) $S(0) = 0$, то $-\frac{1}{4} + C_1 = 0$, $C_1 = \frac{1}{4}$.

Итак, окончательно получаем: сумма ряда (8) есть $S(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + x + \frac{1}{4}$, или $S(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

§ 18. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ

В § 16 и 17, рассматривая тот или иной степенной ряд, мы устанавливали область сходимости этого ряда и рассматривали задачу о нахождении его суммы. Теперь мы займемся обратной задачей: имея функцию $f(x)$, найти такой степенной ряд, который бы имел эту функцию в некоторой области сходимости своей суммой.

Определение. *Говорят, что функция $f(x)$ разлагается на данном промежутке L в степенной ряд, если существует такой степенной ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *(где a, a_0, a_1, ... — некоторые числа), который на этом промежутке сходится к данной функции, так что*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad (1)$$

для всех $x \in L$.

При этом говорят также, что функция $f(x)$ в промежутке L *разлагается в ряд* по степеням разности $x - a$, а само равенство (1) (точнее, его правую часть) называют *разложением* $f(x)$ по степеням разности $x - a$. В качестве промежутка L обычно рассматривают некоторую окрестность $(a - r, a + r)$ с центром в точке a $(r \neq 0)$.

Значение указанной выше задачи состоит прежде всего в том, что разложение функций в степенные ряды находит широкое применение в приближенных вычислениях и является одной из основ приближенных методов математического анализа. Вследствие простоты конструкции степенного ряда такое разложение дает способ эффективного вычисления значений функции по данному значению ее аргумента, ибо частичные суммы степенного ряда являются обыкновенными многочленами. Заменяя данную функцию $f(x)$ частичной суммой ряда, мы сводим вычисление значений этой функции к вычислению значений некоторого многочлена. Беря достаточно большое число первых членов степенного ряда, мы можем вычислить при этом значение функции $f(x)$ с любой заданной степенью точности.

С помощью разложения функций в степенные ряды также нередко приближенно вычисляют значения определенных интегралов, находят приближенные значения корней уравнений. Представление функции степенным рядом часто позволяет устанавливать различные свойства этой функции и т. д.

Рассмотрение вопроса о разложении функции в степенной ряд мы начнем с доказательства следующей теоремы.

Теорема (единственности). *Если в некотором интервале, содержащем данную точку a, функция $f(x)$ имеет разложение в степенной ряд по степеням разности $x - a$, то такое разложение является единственным.*

Доказательство. Пусть в интервале $(a - r,\ a + r)$ $(r \neq 0)$ имеет место равенство (1), в котором $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — пока неопределенные коэффициенты. Пользуясь свойством дифференцируемости степенных рядов, найдем эти коэффициенты по значениям функции $f(x)$ и ее производных в точке a. Так как функция $f(x)$ в интервале $(a - r,\ a + r)$ есть сумма степенного ряда, то в этом интервале $f(x)$ имеет производные любого порядка, которые могут быть получены почленным дифференцированием (1) (§ 17). Поэтому имеем:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x) &= 1\cdot a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots \\
f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \ldots + \\
&\qquad + (n-1)na_n(x-a)^{n-2} + \ldots \\
f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + \ldots \\
&\qquad + (n-2)(n-1)a_n(x-a)^{n-3} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\ldots na_n + 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)a_{n+1}(x-a) + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Полагая в тождествах (1) и (2) $x = a$, получим:

$$f(a) = a_0,\ f'(a) = 1\cdot a_1,\ f''(a) = 2!\ a_2,\ f'''(a) = 3!\ a_3,\ \ldots;\ f^n(a) = n!\,a_n,\ \ldots$$

Отсюда

$$a_0 = f(a),\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(a)}{3!},\ \ldots\ a_n = \frac{f^n(a)}{n!},\ \ldots . \quad (3)$$

Таким образом, коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ степенного ряда, суммой которого в соответствующем интервале является функция $f(x)$, однозначно определяются с помощью формул (3) функцией $f(x)$ и точкой a, так что представление функции $f(x)$ степенным рядом в данном интервале (когда оно возможно) единственно.

§ 19. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

1. Понятие ряда Тейлора. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке a. Тогда по этой функции можно вычислить коэффициенты a_n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ по формулам (3) (§ 18).

Определение. *Степенной ряд с коэффициентами, вычисленными по формулам* (3), § 18, *т. е. ряд вида*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad (1)$$

называется рядом Тейлора (для) функции $f(x)$, *записанным по степеням разности* $(x-a)$, *или, иначе говоря, в окрестности точки* a (независимо от того, является ли в какой-либо области функция $f(x)$ его суммой или нет).

Если $a=0$, то ряд Тейлора принимает вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (2)$$

В этом частном случае ряд Тейлора обычно называют *рядом Маклорена**).

Теперь доказанная выше теорема может быть сформулирована следующим образом: *если функция* $f(x)$ *в некоторой окрестности точки* a *разлагается в степенной ряд по степеням разности* $x-a$, *то этим рядом непременно является ряд Тейлора этой функции, составленный в окрестности точки* a.

Этот результат дает нам подход к решению поставленной выше задачи о разложении данной функции $f(x)$ в степенной ряд (мы теперь знаем вид этого степенного ряда). Вид коэффициентов этого ряда указывает на то, что ставить задачу о разложении $f(x)$ в степенной ряд (в ряд Тейлора) по степеням $x-a$ можно лишь по отношению к бесконечно дифференцируемой в точке a функции; но это есть только необходимое условие разложения $f(x)$ в ряд Тейлора: далеко не всякая бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ может быть представлена своим рядом Тейлора. Может оказаться, что составленный по $f(x)$ ряд Тейлора (1) хотя и сходится в некотором интервале $(a-r, a+r)$, но его сумма не совпадает с $f(x)$, кроме как в точке $x=a$, или он даже вообще может оказаться расходящимся для $x\neq a$. Классический пример такого ряда дает нам функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Убедимся, что данная функция бесконечно дифференцируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, и найдем ее производные. Пусть сначала $x\neq 0$. Тогда находим: $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=P_3\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$,

$f''(x)=-\left(\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=P_6\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ и вообще $f^{(n)}(x)=P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, где $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ обозначает некоторый многочлен степени $3n$ относительно $\frac{1}{x}$ (в общности этого закона нетрудно убедиться при помощи метода математической индукции).

---

*) Хотя это название исторически неоправданно.

Покажем, далее, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема и при $x = 0$, и вычислим все ее производные при этом значении x.

Прежде всего вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$, где m — натуральное число. Обозначим $\frac{1}{x^2} = y$. Тогда при $x \to 0$, $y \to \infty$ и

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{\pm y^{\frac{m^*)}{2}}}{e^y} = 0 \tag{3}$$

для любого натурального m (см. т. 1, § 78, пример 5).

Отсюда для всякого многочлена $P_k\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + \ldots + a_k\frac{1}{x^k}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left[P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right] = \sum_{m=0}^{k}\lim_{x\to 0}\left(a_m\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0. \tag{4}$$

Теперь, пользуясь определением производной в данной точке и равенством (3), находим:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0.$$

Допустим, что при некотором n $f^{(n)}(0) = 0$. Тогда по определению производной порядка $(n+1)$ и учитывая (4) имеем:

$$f^{n+1}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right] = 0,$$

а значит, согласно принципу математической индукции, равенство $f^{(m)}(0) = 0$ верно при всяком натуральном m.

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции $f(x)$ при $x = 0$ равны нулю и соответствующий ряд Тейлора для этой функции имеет вид: $0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n + \ldots$. Этот ряд, очевидно, сходится, и его сумма равна нулю на $(-\infty, +\infty)$, в то время как рассматриваемая функция $f(x)$ не является тождественно равной нулю (она равна нулю только при $x = 0$).

Таким образом, значения рассматриваемой функции $f(x)$ и суммы ее ряда Тейлора совпадают здесь только при одном значении x, именно при $x = 0$.

Из рассмотренного примера следует, что две различные функции могут иметь один и тот же ряд Тейлора на одном и том же про-

*) Знак минус возникает в случае отрицательного x и нечетного m.

межутке. Так, например, если $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, то тот же ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ в точке a, очевидно, имеет и функция $\varphi(x) + f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}, & \text{если } x \neq a, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$$

Рассмотрим еще пример. Функция $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ бесконечно дифференцируема в интервале $(-\infty, +\infty)$, ее ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ есть $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ Но этот ряд сходится и имеет своей суммой функцию $\frac{1}{1+x^2}$ только в интервале $(-1, 1)$ (см. с. 7). Здесь, таким образом, значения функции $\psi(x)$ и суммы ее ряда Тейлора совпадают лишь на части области, в которой $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема.

2. Условие разложения функции в ряд Тейлора. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некотором интервале $(a - r, a + r)$. Найдем значения функции и ее производных в точке a и составим для $f(x)$ ряд Тейлора:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots. \quad (5)$$

Выясним, при каких условиях можно утверждать, что составленный ряд Тейлора сходится к $f(x)$ в интервале $(a - r, a + r)$.

Так как функция $f(x)$ имеет в интервале $(a - r, a + r)$ производные любых порядков, то для всех значений x из этого интервала и для любого n имеет место формула Тейлора (т. 1, § 76):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x), \quad (6)$$

где $R_n(x)$ — остаточный член этой формулы. С помощью этой формулы можно дать ответ на поставленный выше вопрос.

Теорема. *Для того чтобы ряд Тейлора* (5) *функции* $f(x)$ *сходился к ней в некотором интервале* $(a - r, a + r)$, *необходимо и достаточно, чтобы остаточный член* $R_n(x)$ *формулы Тейлора* (6) *для* $f(x)$ *стремился к нулю при всех* x *из этого интервала, когда* n *неограниченно возрастает.*

Доказательство. Обозначим через $S_n(x)$ n-ю частичную сумму ряда Тейлора (5):

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \quad (S_1(x) = f(a)).$$

Так как коэффициенты многочлена формулы Тейлора (6) для $f(x)$ строятся по тому же правилу, что и коэффициенты для ряда Тейлора (5), то формулу Тейлора (6) можно переписать так:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

откуда

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x). \tag{7}$$

Пусть в интервале $(a - r,\ a + r)$ ряд (5) сходится и сумма его равна $f(x)$. Тогда, замечая, что $S_n(x)$ представляет собой n-ю частичную сумму ряда (5), мы по определению суммы сходящегося ряда имеем для всех x из $(a - r,\ a + r)$: $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$ и в силу (7) получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ также для всех x из $(a - r,\ a + r)$.

Обратно, если для каждого x из интервала $(a - r, a + r)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, то, как следует из (7), для этих значений x $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$, откуда $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$, а это и означает, что ряд Тейлора (5) сходится в интервале $(a - r,\ a + r)$ и его сумма равна $f(x)$, т. е.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \ldots.$$

Теорема доказана.

§ 20. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Теорема, доказанная в § 19, позволяет установить следующий примерный план решения задачи на разложение данной функции в ряд Тейлора (в окрестности точки a):

1) *найти последовательные производные функции* $f(x)$;

2) *вычислить* $f(a)$ *и числа* $f^{(n)}(a)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

3) *записать (формально) ряд Тейлора, соответствующий функции* $f(x)$:

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \ldots. \tag{1}$$

($\sim$ — знак соответствия);

4) *найти интервал* $(a - r,\ a + r)$ *сходимости записанного ряда Тейлора*;

5) *записать остаточный член* $R_n(x)$ *формулы Тейлора для* $f(x)$;

6) *найти множество тех значений* x *из* $(a - r,\ a + r)$*), для

*) В частности, иногда этим множеством является сам интервал $(a - r,\ a + r)$ сходимости составленного ряда Тейлора.

которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Для тех x, для которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, мы вправе в соотношении (1) заменить знак соответствия ($\sim$) знаком равенства ($=$), т. е. вправе записать разложение $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

Степенные ряды представляют собой выражения, с помощью которых можно представлять многие элементарные функции. Ниже мы приводим разложения простейших элементарных функций в ряд Тейлора, взятый в форме ряда Маклорена.

1. Разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$. В т. I, § 77 были получены формулы:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \tag{2}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x), \tag{3}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + R_{2k}(x), \tag{4}$$

где $R_n(x)$, $R_{2k+1}(x)$ и $R_{2k}(x)$ — остаточные члены соответственно записанных формул. Там же было доказано, что в формулах (2), (3) и (4) при любом x остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Теперь на основании теоремы предыдущего параграфа мы можем заключить, что функции e^x, $\sin x$ и $\cos x$ разлагаются (для всех x) соответственно в следующие степенные ряды:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots , \tag{5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots , \tag{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots . \tag{7}$$

(Эти важные формулы впервые были получены Ньютоном.)

Заметим, что с теоретической точки зрения чрезвычайно важно то, что формулы (6) и (7) выражают значения функций $\sin x$ и $\cos x$ через соответствующее значение x чисто аналитически, т. е. без посредства тех геометрических построений, с которыми эти две функции так тесно связаны в школьном курсе математики. Таким образом, функции $\sin x$ и $\cos x$, а также функцию e^x можно было бы с самого начала определить как суммы соответствующих рядов (6), (7) и (5). Из таких определений уже вытекали бы все известные свойства этих функций. Так, например, из (6), соответственно из (7), сразу видно, что $\sin(-x) = -\sin x$, а $\cos(-x) = \cos x$.

Поскольку формулы (5), (6) и (7) справедливы при любом значении x, то ими можно пользоваться для вычисления (и притом с любой степенью точности) приближенных значений соответственно функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ при любых значениях x. Так, с помощью формулы (2) в т. I (§ 77) было рассмотрено вычисление числа e с точностью до 10^{-7}.

Ряды (6) и (7) при всех значениях $x \neq 0$, как положительных, так и отрицательных, — знакочередующиеся. И, как нетрудно видеть, всегда можно взять такое число k первых членов ряда (6) или (7), что остальные члены будут расположены в убывающем порядке по абсолютной величине, и поэтому, беря частичную сумму S_k этого ряда за приближенное значение вычисляемой величины $\sin x$ ($\cos x$) при заданном x, мы найдем (теорема Лейбница), что абсолютная величина допущенной при этом ошибки будет меньше абсолютной величины первого отброшенного члена. Наиболее удобны эти ряды для вычислений приближенных значений $\sin x$ и $\cos x$ при $|x| < 1$, так как в этом случае ряды (6) и (7) сходятся быстро. При $|x| \geqslant 1$ ряды (6) и (7) сходятся медленно и для вычислений неудобны. В таких случаях целесообразно с помощью формул приведения предварительно свести данную задачу к вычислению синуса или косинуса некоторого числа из сегмента $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Пример. Вычислить $\cos 5°$ с точностью до 10^{-5}.

Р е ш е н и е. Так как в формуле (7) под x подразумевается радианная мера угла, то предварительно угол в 5° выразим в радианах: $\pi \cdot \frac{5}{180} = \frac{\pi}{36}$; при $x = \frac{\pi}{36}$ из (7) найдем:

$$\cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \ldots . \qquad (8)$$

Этот знакочередующийся ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница. Поэтому если за приближенное значение $\cos\frac{\pi}{36}$ взять значение какой-нибудь из частичных сумм ряда (8), то абсолютная величина допускаемой при этом ошибки будет меньше абсолютной величины первого из отброшенных членов ряда (8). Так как $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 < 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$, то, беря только два первых члена рассматриваемого ряда, мы вычислим $\cos\frac{\pi}{36}$ с точностью до $4 \cdot 10^{-6}$, а тем более до 10^{-5}, с недостатком.

Вычисление члена $\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2$ нужно вести по крайней мере с шестью верными знаками, так как тогда полная ошибка не превзойдет $0{,}5 \cdot 10^{-6} + 4 \times \times 10^{-6} \cdot < 10^{-5}$. Произведя вычисления, находим: $\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \approx 0{,}003808(+1)$; $1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \approx 1 - 0{,}003808 = 0{,}996192\ (-1)$*) .

*) Знак (+) указывает на то, что вычисление произведено с избытком, а знак (—) — на то, что оно произведено с недостатком.

Таким образом,

$$0{,}996192 < 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 < 0{,}996193,$$

$$0 < \cos\frac{\pi}{36} - \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\right] < 4 \cdot 10^{-6},$$

что дает $0{,}996192 < \cos\frac{\pi}{36} < 0{,}996197$, откуда с точностью до 10^{-5} получаем: $\cos\frac{\pi}{36} \approx 0{,}99619$.

2. Разложение в ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$. В т. I (§ 77) была получена формула:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x), \qquad (9)$$

где остаточный член $R_{n+1}(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$ $(0<\theta<1)$ (в форме Лагранжа), причем было доказано, что при $-1 < x \leqslant 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Отсюда теперь следует, что функция $\ln(1+x)$ на полусегменте $(-1, 1]$ разлагается в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots . \qquad (10)$$

Формула (10) может служить (в принципе) для приближенного вычисления с любой степенью точности значений функции $\ln(1+x)$ в точках x полусегмента $(-1, 1]$. На практике, однако, эта формула малопригодна, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ сходится слишком медленно. Например, чтобы заведомо гарантировать результат вычислений $\ln(1+x)$ при $x = 1$ с точностью до 0,005, нужно, чтобы было $\frac{1}{n} < 0{,}005$, или $n > 200$, т. е. надо просуммировать 201 первых члена ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$, что практически трудно выполнить. Но, исходя из формулы (10), получают формулу, которая позволяет эффективно находить логарифмы любого положительного числа (см. т. I, § 77).

§ 21. БИНОМИАЛЬНЫЙ РЯД И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ РАДИКАЛОВ

1. Обобщение формулы бинома Ньютона. Разложим в ряд по степеням x степенную функцию вида:

$$f(x) = (1+x)^m, \qquad (1)$$

где m — любое действительное число*).

*) Мы не пытаемся функцию x^m разложить в ряд Маклорена, так как, если m не есть натуральное число (а только этот случай и интересен), то производные от x^m, начиная с некоторой, в точке $x = 0$ не существуют.

Если m — целое неотрицательное число, то имеем:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^m$$

— частный случай формулы

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}x^2 + \ldots + x^m,$$

известный под названием формулы бинома Ньютона*). Поэтому рассмотрим только случай, когда m не является целым неотрицательным числом.

Последовательные производные данной функции (в своих областях существования) будут:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$$

и вообще при любом натуральном n:

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n} \qquad (*)$$

(для соответствующих x). При $x = 0$ эти производные будут иметь значения:

$$f'(0) = m,\ f''(0) = m(m-1),\ f'''(0) = m(m-1)(m-2),\ \ldots;$$
$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Таким образом, ряд Маклорена функции (1) будет (см. формулу (2) § 19):

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (2)$$

где удобства ради общий член представлен $(n+1)$-м членом, причем первый член выходит из общего закона. Этот ряд называется *биномиальным рядом*.

При сделанных относительно m предположениях ни один из коэффициентов ряда (2) не будет нулем. Найдем интервал сходимости этого ряда. По признаку Даламбера имеем при фиксированном x:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot m(m-1)\ldots(m-n+2)x^{n-1}}\right| =$$
$$= |x| \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\left|1 - \frac{m+1}{n}\right| = |x|.$$

Следовательно, ряд (1) абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

---

*) Фактически эта формула была известна еще задолго до Ньютона (1643—1727). Ньютону же принадлежит заслуга обобщения ее на случай произвольных действительных показателей.

Докажем теперь, что при $|x| < 1$ остаточный член $R_n(x)$ формулы Маклорена для функции $(1+x)^m$ стремится к нулю при $n \to +\infty$; удобства ради возьмем здесь $R_n(x)$ в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

(т. I, § 76). Подставив сюда значение n-й производной (см. (*)), получим, что в данном случае:

$$R_n(x) = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} m(m-1)\dots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n},$$

что можно переписать еще так:

$$R_n(x) = \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{n-1}}{(n-1)!} \times \\ \times mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}. \tag{3}$$

Выражение $u_{n-1} = \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Действительно, для степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1} = \frac{m-1}{1!} x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!} x^2 + \dots + \\ + \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots$$

имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)(n-1)!\,x^n}{n!(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{n-1}}\right| = \\ = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m-n}{n}\right||x| = |x|,$$

так что при $|x| < 1$ этот ряд сходится, каково бы ни было m, и, значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = 0$.

Относительно остальных двух сомножителей из (3) $mx(1+\theta x)^{m-1}$ и $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ можно сказать, что они остаются ограниченными при неограниченном возрастании n. Действительно, имеем: $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, а так как $0 < \theta < 1$, то $-|x| \leqslant \theta x \leqslant |x|$ и $1-|x| \leqslant 1+\theta x \leqslant 1+|x|$. Следовательно, при $m > 1$ $(1-|x|)^{m-1} \leqslant (1+\theta x)^{m-1} \leqslant (1+|x|)^{m-1}$, а при $m < 1$ $(1-|x|)^{m-1} \geqslant (1+\theta x)^{m-1} \geqslant (1+|x|)^{m-1}$, так что выражение $|mx(1+\theta x)^{m-1}|$ заключено между числами $|mx|(1+|x|)^{m-1}$ и $|mx|(1-|x|)^{m-1}$, не зависящими от n. Поэтому, если обозначить через k наибольшее из этих двух чисел, то при $x \in (1, 1)$ и любом m будет выполняться неравенство: $|mx(1+\theta x)^{m-1}| \leqslant k$.

Далее имеем: $x > -1$, $-\theta < \theta x$ и $0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$. Значит, $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, а следовательно, и подавно $0 < \left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} < 1$ $(n > 1)$.

Итак, при $|x| < 1$ остаточный член $R_n(x)$ формулы (3) представляется в виде произведения трех сомножителей, из которых один, u_{n-1}, стремится к нулю при $n \to +\infty$, а два других при этом остаются ограниченными, и потому $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ для каждого x из интервала $(-1, 1)$. Но тогда на основании правила из § 20 мы заключаем, что для всех $|x| < 1$ имеет место разложение:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (4)$$

Пусть теперь требуется разложить в ряд функцию $f(x) = (a+x)^m$, где m — любое действительное число, а a — постоянная, отличная от нуля и такая, что при заданном m величина a^m определена. Тогда, если $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1$, т. е. если $|x| < |a|$, то будем иметь:

$$(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = a^m\left[1 + \frac{m}{1}\frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \ldots\right],$$

или

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots .$$

Полученная формула и является о б о б щ е н и е м ф о р м у л ы б и н о м а Н ь ю т о н а на случай произвольного показателя степени бинома. Она составлена так же, как и формула бинома Ньютона, с той только разницей, что найденное разложение является, вообще говоря, рядом, а не конечной суммой и теперь получено (в соответствующей области) для произвольного m (а не только для натурального).

Отметим некоторые частные случаи биномиального ряда.
Полагая в разложении бинома $m = -1$, мы получим:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots (-1 < x < 1). \qquad (5)$$

Это — известная формула суммы членов убывающей геометрической прогрессии.

Взяв $m = \frac{1}{2}$, будем иметь:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots + \\ + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n-2)}x^{n-1} + \ldots,$$

или

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 + \frac{3!!}{6!!}x^3 - \ldots + (-1)^n \frac{(2n-5)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1} + \ldots \qquad (6)$$

($n = 3, 4, \ldots$; первые два члена выходят из общего закона).

Заменяя в формуле (6) x на $-x$, получаем:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 - \frac{3!!}{6!!}x^3 - \ldots - \frac{(2n-5)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1} - \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

2. Применение биномиального ряда к вычислению значений радикалов. Формула (4) особенно удобна для вычисления с любой степенью точности значений радикалов (корней) данной степени из некоторого натурального числа. Пусть, например, требуется вычислить корень k-й степени (k — натуральное число) из натурального числа N, которое не является точной k-й степенью целого числа.

Подберем натуральное число n так, чтобы было $n^k < N < (n+1)^k$ ($n = [\sqrt[k]{N}]$), тогда число $x = \frac{(n+1)^k - N}{(n+1)^k}$ окажется положительным и меньшим 1. Исходя из тождества

$$N = (n+1)^k \left[1 - \frac{(n+1)^k - N}{(n+1)^k}\right] = (n+1)^k (1-x),$$

найдем:

$$\sqrt[k]{N} = (n+1)(1-x)^{\frac{1}{k}}, \quad 0 < x < 1.$$

Разлагая $(n+1)(1-x)^{\frac{1}{k}}$ в биномиальный ряд, получим:

$$\sqrt[k]{N} = (n+1)\left(1 - \frac{\frac{1}{k}}{1!}x + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!}x^2 - \ldots\right). \qquad (7)$$

Беря надлежащее число первых членов ряда (7), мы можем вычислить $\sqrt[k]{N}$ с требуемой точностью.

Если N достаточно близко к $(n+1)^k$, то сходимость ряда из (7) будет быстрой и он окажется удобным в указанных целях. Если же $(n+1)^k - N$ велико, но в то же время $N < 2n^k$, то можно, наряду с разложением (7), пользоваться аналогично с ним полученным из тождества

$$N = n^k\left(1 + \frac{N-n^k}{n^k}\right)$$ разложением $\left(\text{с } x = \frac{N-n^k}{n^k},\ 0 < x < 1\right)$:

$$\sqrt[k]{N} = n(1+x)^{\frac{1}{k}} = n\left(1 + \frac{\frac{1}{k}}{1}x + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!}x^2 + \ldots\right). \quad (8)$$

Если $N < 2n^k$ и вместе с тем $N < \frac{2n^k(n+1)^k}{(n+1)^k + n^k}$, то сходимость ряда из (8) может оказаться более быстрой, чем ряда из (7), и разложением (8) часто будет несколько удобнее пользоваться, чем (7). Но при $\frac{2n^k(n+1)^k}{(n+1)^k+n^k} < N < 2n^k$ (например, для $N = 53$ $k = 3$) удобнее пользоваться все же разложением (7) (а при $N \geqslant 2n^k$ разложение (8) вообще не годится).

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{40}$ с точностью до 0,001.

Р е ш е н и е. Имеем: $2^5 < 40 < 3^5$ ($k = 5$, $n = 2$). Здесь $N = 40 < 2 \cdot 2^5 = 2n^k$ и применимы как формула (7), так и формула (8). Но здесь $N < \frac{2n^k(n+1)^k}{(n+1)^k+n^k}$, и потому мы предпочитаем применить по соображениям более быстрой сходимости соответствующего ряда формулу (8) с $x = \frac{N-n^k}{n^k} = \frac{40-32}{32} = \frac{1}{4}$. Применяя ее, получаем:

$$\sqrt[5]{40} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\left[1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!}\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 2 + \frac{2}{5\cdot 4} - \frac{2\cdot 4}{2!5^2 4^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 9}{3!5^3 4^3} - \frac{2\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!5^4 4^4} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{2\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-11)}{(n-1)!\,5^{n-1}4^{n-1}} + \ldots$$

($n = 3, 4, \ldots$; первые два члена ряда выпадают из общего закона). Отсюда

$$\sqrt[5]{40} - 2 = \frac{2}{5\cdot 4} - \frac{2\cdot 4}{2!\,5^2\,4^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 9}{3!\,5^3\,4^3} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{2\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-11)}{(n-1)!\,5^{n-1}\,4^{n-1}} + \ldots \quad (9)$$

Итак, число $\sqrt[5]{40} - 2$ является суммой ряда Лейбница (§ 7). Значит, ошибка при замене суммы ряда его частичной суммой по абсолютной величине больше абсолютной величины первого из отброшенных его членов. Желая вычислить $\sqrt[5]{40}$ (а значит, и $\sqrt[5]{40} - 2$) с точностью до 0,001, мы будем выписывать члены ряда (9) до тех пор, пока не дойдем до члена, по абсолютной величине не превосходящего 0,001. Поскольку $\left|\frac{2\cdot 4\cdot 9}{3!\cdot 5^3\cdot 4^3}\right| > 0{,}001$, а $\left|\frac{-2\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!\cdot 5^4\cdot 4^4}\right| < 0{,}001$,

то для вычисления приближенного значения $\sqrt[5]{40} - 2$ (а значит, и $\sqrt[5]{40}$) с требуемой точностью берем сумму первых четырех членов. Вычисляя эти члены с четырьмя знаками, найдем: $\sqrt[5]{40} \approx 2{,}0915$.

§ 22. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ КОСВЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛА π

Разложение функций в степенные ряды иногда бывает удобно получить из уже известных разложений с помощью свойств степенных рядов.

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
Р е ш е н и е. Воспользуемся для $|x| < 1$ формулой

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \ldots \qquad (1)$$

геометрический ряд).

Используя возможность почленного интегрирования степенных рядов внутри интервала сходимости, проинтегрируем равенство (1) в промежутке от 0 до z, где $|z| < 1$:

$$\int_0^z \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^z dx - \int_0^z x^2 dx + \int_0^z x^4 dx - \int_0^z x^6 dx + \ldots + (-1)^{n-1} \int_0^z x^{2n-2} dx + \ldots .$$

В результате имеем:

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

или, возвращаясь к букве x, получим:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots . \qquad (2)$$

Доказанное равенство имеет место в интервале $(-1, 1)$ (§ 17, теорема 2).

Пользуясь формулой (2), можно вычислить число π с любой степенью точности. Полагая в этой формуле $x = \frac{1}{5}$, получим:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \ldots . \qquad (3)$$

Обозначая $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \alpha$, находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$ и, далее

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Так как число $\frac{120}{119}$ близко к единице, то аргумент 4α близок к $\frac{\pi}{4}$. Заметив это, вычислим тангенс разности $4\alpha - \frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

Отсюда

$$4\alpha-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{239},\ \text{а}\ \pi=16\alpha-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Применяя к $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ разложение (2) и учитывая (3), получим следующую формулу для вычисления числа π:

$$\pi=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\ldots\right)-$$
$$-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(239)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(239)^5}-\ldots\right). \qquad (4)$$

Оба ряда, входящие в формулу (4), сходятся быстро. Поэтому вычисление числа π по этой формуле можно выполнить, беря лишь небольшое число членов в обоих рядах. Например, вычислим по формуле (4) приближенное значение числа π с шестью верными знаками после запятой.

Для того чтобы гарантировать требуемую точность, оказывается, достаточно взять пять первых членов в первом ряду и два первых члена во втором и каждый взятый член вычислить с семью знаками после запятой; при такой точности вычислений ошибка при подсчете каждого слагаемого меньше, чем $5\cdot10^{-8}$.

Выпишем в отдельные столбцы результаты вычислений положительных и отрицательных членов:

$16:5=3{,}2000000$	$16:3\cdot5^3=0{,}0426667$ (+)
$16:5\cdot5^5=0{,}0010240$	$16:7\cdot5^7=0{,}0000293$ (+)
$16:9\cdot5^9=0{,}0000009$ (—)	$4:239=0{,}167364$ (+)
$4:3\cdot(239)^3=0{,}0000001$ (+)	
$3{,}2010250$	$0{,}0594324$

Отсюда $3{,}2010250-0{,}0594324=3{,}1415926$.

Полученная сумма может быть больше π за счет того, что некоторые приближенные числа (они отмечены знаком (+)) взяты с избытком. Эта погрешность не больше $4\frac{5}{10^8}=\frac{2\cdot10}{10^8}=\frac{2}{10^7}$. Найденная сумма может быть и меньше π, так как некоторые приближенные числа (они отмечены знаком (—)) взяты с недостатком и, кроме того, не учтены остатки рядов. Первая погрешность не больше $1\cdot\frac{5}{10^8}=\frac{5}{10^8}$. Вторая поправка на отбрасывание невыписанных членов не превышает $\frac{16}{11\cdot5^{11}}+\frac{4}{5(239)^5}<\frac{14}{10^8}+\frac{4}{4\cdot10^8}=\frac{15}{10^8}$. Таким образом, вся погрешность не больше, чем $\frac{5}{10^8}+\frac{15}{10^8}=\frac{2}{10^7}$.

Учитывая все поправки, имеем: $3{,}1415926-\frac{2}{10^7}<\pi<3{,}1415926+\frac{2}{10^7}$, так что $3{,}1415924<\pi<3{,}1415928$. Итак, окончательно,

$$\pi=3{,}141592,$$

причем все выписанные знаки верны.

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$.

Решение. Разложим дробь $\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$ на элементарные дроби (т. I, § 90):

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Функцию $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$ можно рассматривать как сумму геометрического ряда, первый член которого равен единице, а знаменатель $q = \dfrac{x}{2}$; поэтому при $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$, т. е. при $|x| < 2$, имеем:

$$2\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots\right). \tag{5}$$

Пользуясь той же формулой, мы можем для $\left|\dfrac{x}{3}\right| < 1$, т. е. для $|x| < 3$, написать:

$$-\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{5}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}} + \ldots\right). \tag{6}$$

Оба равенства (5) и (6) выполняются при $|x| < 2$. Складывая их почленно, получим искомое разложение:

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \left(2 - \frac{5}{3}\right) + \left(1 - \frac{5}{3^2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3^3}\right)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{5}{3^n}\right)x^{n-1} + \ldots \quad (|x| < 2)^*).$$

§ 23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Мы знаем (т. I, § 101), что если известна какая-либо первообразная для непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$, то определенный интеграл от этой функции может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница. Но, как известно (т. I, § 88), в ряде случаев невозможно выразить первообразную для функции $f(x)$ через элементарные функции в конечном виде. В этих случаях формула Ньютона — Лейбница оказывается обычно бесполезной, а потому в таких ситуациях часто прибегают к приближенному вычислению определенных интегралов. Приближенное интегрирование применяется еще и тогда, когда неопределенный интеграл от функции, хотя и берется в конечном виде, но выражается весьма

*) Легко проверить, что интервал $(-2, 2)$ есть интервал сходимости полученного степенного ряда.

сложно. Кроме того, на практике часто только и надо знать какое-либо приближенное значение того или иного определенного интеграла.

В § 105 (т. I) уже были рассмотрены три способа приближенного интегрирования: способы прямоугольников, трапеций и парабол. Здесь мы рассмотрим еще один способ (часто применяемый на практике) — способ приближенного интегрирования с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Пусть в интервале $(a - r, a + r)$ функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням разности $x - a$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a)^n + \ldots .$$

Тогда, как было доказано в § 17, для любого сегмента $[p, q]$, содержащегося в $(a - r, a + r)$, будет выполняться равенство:

$$\int_p^q f(x)dx = \int_p^q a_0 dx + \int_p^q a_1(x - a)dx + \int_p^q a_2(x - a)^2 dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_p^q a_n(x - a)^n dx + \ldots .$$

Все интегралы, стоящие в правой части последнего равенства, вычисляются легко:

$$\int_p^q f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[(q - a)^{n+1} - (p - a)^{n+1}\right]. \qquad (1)$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (1), числовой. Заменяя сумму этого ряда его частичной суммой, получим приближенное значение определенного интеграла $\int_p^q f(x)\,dx$. Таким образом, формула (1) дает способ приближенного вычисления интеграла $\int_p^q f(x)\,dx$, не требующий нахождения первообразной для $f(x)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Р е ш е н и е. Для вычисления данного интеграла мы не можем воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница, так как первообразная для e^{-x^2} не является элементарной функцией. Воспользуемся сделанным указанием о приближенном вычислении интеграла.

Разложим подынтегральную функцию e^{-x^2} в степенной ряд. Для этого достаточно в известном разложении e^x по степеням x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \qquad (2)$$

поставить вместо x выражение $(-x^2)$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} + \ldots \qquad (3)$$

Равенство (3), как и равенство (2), имеет место при всех значениях x. Интегрируя (3) почленно в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, найдем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!\,(2n-1)} + \ldots\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{2!\,5\cdot 2^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 2^7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!\,(2n-1)\,2^{2n-1}} + \ldots.$$

Итак, данный интеграл равен сумме ряда Лейбница. Следовательно, ошибка при замене суммы ряда его частичной суммой по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого из отброшенных его членов. Так как мы должны обеспечить вычисление с точностью до 0,001 и так как

$$\frac{1}{2!\,5\cdot 2^5} = 0{,}003125 > \frac{1}{2}\,0{,}001, \quad \text{а} \quad \frac{1}{3!\,7\cdot 2^7} \approx 0{,}00018 < \frac{1}{2}\cdot 0{,}001,$$

то достаточно взять только три первых члена. Отбрасывая все члены ряда, начиная с четвертого, получим значение $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$ с нужной степенью точности: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{2!\,5\cdot 2^5} \approx 0{,}4614.$

Пример 2. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 1 & \text{для } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке, в том числе и в точке $x = 0$, то интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ существует. Но соответствующий неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ снова не может быть вычислен

по формуле Ньютона — Лейбница. Поступим тогда следующим образом: разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, и полученное равенство проинтегрируем почленно. Для всех значений x имеем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Деля обе части этого равенства на x, получим (при $x \neq 0$):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Ряд $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$ сходится для всех x, и при $x = 0$ его сумма равна 1. Так как $f(0) = 1$, то для всех x справедливо равенство:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots . \qquad (4)$$

Интегрируя (4) почленно в пределах от 0 до 1, найдем:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right] dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)} + \ldots\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\,(2n-1)!} + \ldots . \qquad (5)$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (5), — ряд Лейбница. Найдем первый из членов этого ряда с абсолютной величиной, меньшей чем $\frac{1}{2}\cdot 0{,}0001$. Это будет $\frac{1}{7\cdot 7!} = 0{,}00003$ (+). Поэтому для вычисления интеграла с заданной степенью точности достаточно ограничиться тремя первыми членами ряда. Так как

$$1 + \frac{1}{5\cdot 5!} = 1{,}00167\ (-), \quad \text{а}\ \frac{1}{3\cdot 3!} = 0{,}05556\ (-),$$

то с учетом всех погрешностей находим: $\int_0^1 f(x)\,dx \approx 0{,}9461$, причем все десятичные знаки верны.

ГЛАВА IV.

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 24. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1. Предварительные понятия. В различных приложениях математического анализа, особенно в математической физике, теории упругости, электротехнике большую роль играют ряды Фурье*) и особенно их частный случай — тригонометрические ряды Фурье.

Вообще *тригонометрическим рядом называют ряд вида*

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x + \\ + \ldots + a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x + \ldots,$$

или, в символической записи:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \qquad (1)$$

где $\omega, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — постоянные числа ($\omega > 0$).

К изучению таких рядов исторически привели некоторые задачи физики, например задача о колебаниях струны (XVIII в.), задача о закономерностях в явлениях теплопроводности и др. В приложениях рассмотрение тригонометрических рядов прежде всего связано с задачей представления данного движения, описываемого уравнением $y = f(x)$, в виде суммы простейших гармонических колебаний, часто взятых в бесконечно большом числе, т. е. в качестве суммы ряда вида (1).

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: выяснить, существует ли для данной функции $f(x)$ на заданном промежутке такой ряд (1), который сходился бы на этом промежутке к данной функции. Если это возможно, то говорят, что на этом промежутке функция $f(x)$ может быть представлена в виде тригонометрического ряда, или что она *разлагается в тригонометрический ряд.*

Заметим, что, если ряд (1) сходится в некоторой точке x_0, в силу периодичности функций $a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$ ($n = 1, 2, \ldots$), он окажется сходящимся и во всех точках вида $x_0 + \frac{2\pi}{\omega} m$ (m — любое целое число), и тем самым его сумма $S(x)$ будет (в области

*) Ж. Фурье (1768—1830) — известный французский математик и физик.

сходимости ряда) периодической функцией: если $S_n(x)$ — n-я частичная сумма этого ряда, то имеем $S_n(x_0+T) = S_n\left(x_0+\frac{2\pi}{\omega}\right) = S_n(x_0)$ $\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$, а потому и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x_0+T) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x_0)$, т. е. $S(x_0+T) = S(x_0)$. Поэтому, говоря о разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд вида (1), мы должны предполагать $f(x)$ периодической функцией.

2. **Интегралы от периодических функций.** Пусть $f(x)$ — периодическая функция, с периодом T, интегрируемая на любом сегменте вида $[x_0, x_0+T]$. Тогда *величина интеграла* $\int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx$ *остается при любом* x_0 *одной и той же*: для любых x_0, x_0'

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = \int_{x_0'}^{x_0'+T} f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Докажем это. Прежде всего имеем при любых a и b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx.$$

Действительно, полагая во втором интеграле $x = z + T$, найдем (T — период $f(x)$):

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(z+T)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теперь имеем:

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0'} f(x)\,dx + \int_{x_0'}^{x_0'+T} f(x)\,dx + \int_{x_0'+T}^{x_0+T} f(x)\,dx.$$

Так как по доказанному $\int\limits_{x_0'+1}^{x_0+T} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0'}^{x_0} f(x)\,dx$, то первый и третий интегралы здесь взаимно уничтожаются, и мы получаем требуемое.

3. **Интегралы от некоторых тригонометрических функций.** В дальнейшем нам понадобятся значения следующих интегралов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = 0 \quad (k = 1,2,\ldots), \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\,dx = 0 \quad (k = 1,2,\ldots;\ m = 1,2,\ldots), \qquad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx\, dx = 0 \tag{4}$$

$$(k = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots;\ k \neq m),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Докажем, например, равенства (4) и (5) (с косинусами):

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos km\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (k + m) x + \cos (k - m) x]\, dx,$$

и при $m \neq k$ $\quad I = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (k + m) x}{k + m} + \frac{\sin (k - m) x}{k - m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$

а при $m = k$ $\quad I = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{\pi} (\cos 2kx + 1)\, dx = \left[\frac{1}{2k} \sin 2kx + x \right]_{0}^{\pi} = \pi.$

Аналогичные равенства имеют место и на сегменте $[0, 2\pi]$.

Эти свойства тригонометрических функций допускают обобщения.

§ 25. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Конечная или бесконечная система функций*

$$\psi_0 (x),\ \psi_1 (x),\ \psi_2 (x),\ \ldots,\ \psi_n (x),\ \ldots, \tag{1}$$

интегрируемых на данном сегменте $[a, b]$*) *и не равных тождественно нулю, называется ортогональной системой функций на этом сегменте, если выполняются следующие условия:*

1) $\int_a^b \psi_i (x)\, \psi_j (x)\, dx = 0$, если $i \neq j$ $(i = 0, 1, 2, \ldots;\ j = 0, 1, 2, \ldots)$;

2) $\int_a^b \psi_i^2 (x)\, dx \neq 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$

В частности, бесконечная система функций

$$1,\ \cos \frac{\pi x}{l},\ \sin \frac{\pi x}{l},\ \cos \frac{2\pi x}{l},\ \sin \frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos \frac{n\pi x}{l},\ \sin \frac{n\pi x}{l},\ \ldots \tag{2}$$

является ортогональной на любом сегменте длины $2l$, например на $[-l, l]$.

*) Здесь и в дальнейшем, говоря об интегрируемости функции на данном сегменте, мы будем иметь в виду ее интегрируемость в смысле собственного интеграла (собственную интегрируемость).

Действительно, имеют место равенства:

$$\int_{-l}^{l} 1 \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx = \int_{-l}^{l} 1 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx = \int_{-l}^{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} 0 \text{ для } m \neq k, \\ l \text{ для } m = k. \end{cases} \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots; \\ m = 1, 2, \ldots. \end{pmatrix}$$

Эти равенства легко следуют из равенств (2)—(5) (§ 24). Например, сделав в предпоследнем из взятых интегралов замену переменного $\frac{\pi x}{l} = z$, получим по (4) и (5):

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{e}\, dx = \frac{l}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kz \cdot \cos mz\, dz = \begin{cases} \frac{l}{\pi} \cdot 0 = 0, \text{ если } m \neq k, \\ \frac{l}{\pi} \cdot \pi = l, \text{ если } m = k. \end{cases}$$

Очевидно, для любой ортогональной системы верны такие утверждения:

1) любая ее подсистема из не менее чем двух функций сама ортогональна; 2) при умножении каждой из функций системы на какое-либо постоянное, отличное от нуля, система остается ортогональной.

В связи с ортогональными системами часто рассматривают также ортогональные функции: две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые на данном сегменте $[a, b]$, называются *ортогональными*, если имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0.$$

Отношение ортогональности функций обладает следующим свойством: *если функция $f(x)$ ортогональна на сегменте $[a, b]$ к каждой из функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_k(x)$, то она ортогональна на нем и к любой их линейной комбинации.* В самом деле, при любых числах $c_1, c_2, \ldots, c_k$ имеем:

$$\int_a^b [c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x)]\, f(x)\, dx = c_1 \int_a^b \varphi_1(x)\, f(x)\, dx +$$

$$+ c_2 \int_a^b \varphi_2(x)\, f(x)\, dx + \ldots + c_k \int_a^b \varphi_k(x)\, f(x)\, dx = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots +$$

$$+ c_k \cdot 0 = 0.$$

Определение 2. *Ортогональная на* $[a, b]$ *система функций* $\{\varphi_n(x)\}$ *называется нормированной (или ортонормированной) системой, если для ее функций,* $\varphi_n(x)$, *имеет место равенство:*

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Всякую ортогональную систему функций (1) можно привести к нормальному виду («нормировать»). В самом деле, рассмотрим на $[a, b]$ систему $\{\varphi_n(x)\}$ функций вида: $\varphi_n(x) = A_n\psi_n(x)$, где A_n — некоторые числа ($A_n \neq 0$; $n = 0, 1, 2, \ldots$). Эта система будет по (2) ортогональной на $[a, b]$. Потребуем теперь, чтобы было (для тех же n): $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \int_a^b A_n^2\psi_n^2(x)\,dx = 1$. Так как $\int_a^b \psi_n^2(x)dx \neq 0$ (>0), то A_n отсюда определяется, и притом однозначно (с точностью до знака):

$$A_n = \pm\frac{1}{\sqrt{\int_a^b \psi_n^2(x)\,dx}}. \tag{3}$$

Таким образом, система функций $\{\varphi_n(x)\}$ при A_n из (3) будет уже нормированной ортогональной системой на $[a, b]$.

Пример. Нормировать ортогональную (с. 96, $l = \pi$) на $[-\pi, \pi]$ систему:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots. \tag{4}$$

Р е ш е н и е. По (3) имеем, беря перед радикалом знак $+$ и учитывая формулу (5) (§ 24) ($k = 1, 2, \ldots$):

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad A_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$A_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Получаем из (4) такую нормированную ортогональную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{5}$$
$$(-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

§ 26. РЯД ФУРЬЕ

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — бесконечная ортогональная нормированная на $[a, b]$ система функций, а c_n — некоторые постоянные ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Составим ряд вида:

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{1}$$

Поставим вопрос: можно ли для данной на $[a, b]$ функции $f(x)$ подобрать такие коэффициенты c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, чтобы ряд (1) с этими коэффициентами на $[a, b]$ сходился, и притом к функции $f(x)$? Не решая здесь этого вопроса полностью, ограничимся пока рассмотрением одного частного случая.

Теорема. *Если ряд* (1), *составленный на* $[a, b]$ *по данной ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}$, *равномерно сходится на данном сегменте к некоторой функции* $f(x)$, *то коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию:*

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть на $[a, b]$ мы имеем равенство:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + \ldots, \tag{3}$$

причем сходимость ряда к $f(x)$ является равномерной. Тогда, умножив обе части равенства (3) на какую-либо из функций $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, мы вновь получим равномерно сходящийся (к $f(x)\,\varphi_n(x)$) ряд, ибо все функции $\varphi_n(x)$, будучи собственно интегрируемыми на $[a, b]$, ограничены на нем. Интегрируя затем на $[a,b]$ обе части полученного равенства (§ 15, теорема 2*[1]), получим:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = c_0\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx + c_1\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_n(x)\,dx + \ldots +$$

$$+ c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx + c_{n+1}\int_a^b \varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(x)\,dx + \ldots \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \quad (*)$$

Но в силу ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ все интегралы в правой части равны нулю, кроме $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx$, который по нормированности этой системы равен единице, и равенство (*) превращается в соотношение (2).

Определение 3. *Если в ряде* (1) *коэффициенты определяются по формулам* (2), *то этот ряд называется рядом Фурье, составленным на* $[a, b]$ *для функции* $f(x)$ *по ортогональной системе функций* $\{\varphi_n(x)\}$, *а коэффициенты* c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *— коэффициентами Фурье функции* $f(x)$.

То, что ряд (1) на $[a, b]$ является для функции $f(x)$ ее рядом Фурье, вовсе еще не означает в общем случае ни того, что этот ряд

---

*) Доказательство теоремы (с. 52), на которую опирается указанная теорема 2, существенно не меняется от того, что соответствующие члены (и предельная функция) будут считаться просто интегрируемыми функциями, а не именно непрерывными.

сходится к $f(x)$ на этом сегменте, ни даже того, что он вообще на нем сходится (это же отмечалось и для степенных рядов (§ 16)).

Желая, однако, показать, что ряд (1) — ряд Фурье для $f(x)$, условно пишут:

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots .$$

Рассмотрим теперь тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

Перепишем его в следующем виде:

$$c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \ldots + c_{2n-1} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + c_{2n} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} + \ldots , \tag{5}$$

где

$$c_0 = \frac{a_0\sqrt{2\pi}}{2}, \quad c_{2n-1} = a_n\sqrt{\pi}, \quad c_{2n} = b_n\sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как система функций (5) (§ 25) — ортогональная нормированная система на сегменте $[-\pi, \pi]$, то по ней также можно составить ряд Фурье вида (5) для некоторой интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$; коэффициенты c_n определяются при этом из соотношений (2), которые здесь имеют вид:

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx, \quad c_{2n-1} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\, dx, \quad c_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\, dx$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Подставляя в эти равенства значения коэффициентов c_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, мы придем к равенствам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \tag{6}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. При этом заметим, что, так как при $n = 0$ $\cos nx = 1$, формула для a_n будет содержать формулу для a_0 как частный случай, если в ней брать и $n = 0$ (надо, однако, помнить при этом, что первый член ряда (4) есть не a_0, а $\frac{a_0}{2}$).

Формулы (6) определяют те условия, при которых ряд (5), равно как и получающийся из него ряд (4), называют тригонометрическим рядом Фурье для данной функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$.

Пример. Составить для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } -\pi < x < 0, \\ x & \text{для } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

тригонометрический ряд Фурье на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Р е ш е н и е. Так как на $[-\pi, 0]$ $f(x) = 0$, а на $(0, \pi]$ $f(x) = x$, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 \text{ для } n = 2k, \\ -\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi} \text{ для } n = 2k-1 \quad (k = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{n}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отсюда можем записать:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}(\cos n\pi - 1)\frac{\cos nx}{n^2} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right].$$

З а м е ч а н и е. Если $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ — функция четная, то $f(x)\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будет нечетной, а $f(x)\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ —четной функцией. Поэтому для $f(x)$ коэффициенты b_n ряда Фурье все будут равны нулю, а коэффициенты a_n будут определяться равенствами:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{7}$$

(т. I, § 104). Тригонометрический ряд Фурье такой функции содержит только косинусы и имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Аналогично, если $f(x)$ — нечетная на $[-\pi, \pi]$ функция, ее тригонометрический ряд Фурье содержит только синусы и имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{8}$$

§ 27. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕМ. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ. НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ

Пусть на некотором сегменте $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и пусть функция $f(x) - \varphi(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ вместе со своим квадратом*). Тогда *средним квадратичным уклонением функции* $f(x)$ *от функции* $\varphi(x)$ *на* $[a, b]$ *называется число* ρ, *определяемое соотношением*:

$$\rho = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}. \tag{1}$$

Очевидно, что всегда $\rho \geqslant 0$ (причем для непрерывных $f(x)$ и $\varphi(x)$ $\rho = 0$ только в случае, когда $f(x) = \varphi(x)$). Величину ρ часто называют *расстоянием между двумя функциями* $f(x)$ и $\varphi(x)$ (говорят также, что ρ характеризует *приближение* $\varphi(x)$ к $f(x)$ *в среднем*).

В тесной связи с понятием расстояния между двумя функциями находится широко применяемое в математике понятие нормы функции.

Нормой функции $f(x)$, *интегрируемой на* $[a, b]$ *вместе со своим квадратом, называется число* $N(f) = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$.

Очевидно, что норма функции есть среднее квадратичное уклонение функции $f(x)$ от нуля.

Считая, напротив, понятие нормы функции исходным, мы могли бы среднее квадратичное уклонение $f(x)$ от $\varphi(x)$ определить как норму разности $f(x) - \varphi(x)$ этих функций.

Пусть дана функция $f(x)$, интегрируемая на $[a, b]$. Поставим перед собой задачу отыскания так называемого *наилучшего приближения* (*в среднем*) *этой функции* при помощи линейной комбинации

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

(n — фиксировано) функций $\varphi_k(x)$, образующих на $[a, b]$ ортонормированную систему, где α_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) — действительные числа. Задача состоит в отыскании таких чисел α_k (если они существуют), при которых величина $\rho_n = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx}$ достигает наименьшего значения. Так как $\rho_n \geqslant 0$, то вместо ρ_n можно в этих целях взять величину $\rho_n^2 = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx$.

*) В этом определении уже не обязательно в собственном смысле.

Имеем: $\rho_n^2 = \int\limits_a^b [f^2(x) - 2f(x)\sigma_n(x) + \sigma_n^2(x)]\,dx$, откуда по (2)

$$\rho_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\int\limits_a^b [f(x)\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\varphi_k(x)]\,dx + \int\limits_a^b \Big[\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx =$$

$$= \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_a^b \alpha_k^2\,\varphi_k^2(x)\,dx,$$

ибо в силу ортогональности системы функций $\{\varphi_k(x)\}$, $\int\limits_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,dx = 0$ для $k \neq l$. Так как по ее ортонормированности еще $\int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, то, обозначая, как и выше (§ 26),

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x) = c_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

мы можем представить ρ_n^2 в следующем виде:

$$\rho_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k c_k + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2,$$

или

$$\rho_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - c_k)^2.$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - c_k)^2 \geqslant 0$, то можем заключить, что

$$\rho_n^2 \geqslant \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2, \tag{4}$$

причем равенство в (4) будет иметь место только при условии, если $\alpha_k = c_k$ $(k = 0, 1\ 2, \ldots, n-1)$.

Итак, ρ_n^2, а значит, и ρ_n, действительно, имеет на $[a, b]$ наименьшее значение, и оно достигается при значениях $\alpha_k = c_k$, и только при таких значениях, коэффициентов α_k. При этом

$$\rho_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2. \tag{5}$$

Но при $\alpha_k = c_k$ сумма $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k\varphi_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\alpha_k(x)$ есть n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, составленного

на $[a, b]$ для функции $f(x)$ (см. (3)) по бесконечной ортонормированной системе $\{\varphi_i(x)\}$ (с. 99), конечный «отрезок» которой представлен взятыми выше функциями. Таким образом доказана следующая теорема (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье): *из всех линейных комбинаций вида* (2) (*при каждом фиксированном* n) *наилучшее приближение в среднем* (*т. е. наилучшее квадратичное приближение*) *к* $f(x)$ *дает* n*-я частичная сумма* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k(x)$ *ряда Фурье для* $f(x)$ *на* $[a, b]$, *причем*

$$(\rho_n^2)_{\min} = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2. \qquad (6)$$

Но при возрастании n правая часть в (6) может только убывать ($c_k^2 \geqslant 0$), и потому $(\rho_n^2)_{\min}$, а с ним и $(\rho_n)_{\min}$ может при этом лишь убывать. Тем самым частичные суммы ряда Фурье для $f(x)$ являются удобным средством для приближения этой функции в среднем.

Из (5) далее, следует ($\rho_n^2 \geqslant 0$), что при любом n

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (7)$$

Из (7) же, в свою очередь, следует, что n-я частичная сумма ряда $\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2$ ограничена сверху, и потому этот ряд, составленный из квадратов коэффициентов ряда Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, сходится.

Кроме того, из (7) имеем тогда (меняя букву k на n), что и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \text{ (неравенство Бесселя).}$$

Заметим, что, так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ сходится, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n^2 = 0$, а тогда и $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$: *последовательность* $\{c_n\}$ *коэффициентов ряда Фурье сходится к нулю.*

Применим теперь полученные выводы к тригонометрическому ряду Фурье, составленному на сегменте $[-\pi, \pi]$ для интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ по ортонормированной на этом сегменте системе (5) (§ 25). Для этого ряда (с. 100) $c_0 = \frac{a_0\sqrt{2\pi}}{2}$; $c_{2n-1} = a_n\sqrt{\pi}$,

$c_{2n} = b_n\sqrt{\pi}$ ($n = 1, 2, \ldots$), и неравенство Бесселя в рассматриваемом случае можно (с учетом свойств сходящихся рядов) записать в следующем виде:

$$\frac{a_0^2\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2\pi + b_n^2\pi) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

или

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

причем $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$, а значит, и $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n-1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n}$), так что в ряде Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, составленном по интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, коэффициенты стремятся к нулю при $n \to +\infty$. Отсюда (см. (3))

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0. \qquad (9)$$

Равенства (9) остаются в силе и на любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$. Действительно, построим на $[-\pi, \pi]$ новую функцию $\varphi(x)$, определив ее равной $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$ и нулю — для остальных x из $[-\pi, \pi]$; она будет также интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ вместе со своим квадратом, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\alpha} \varphi(x)\cos nx\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\cos nx\,dx + \int_{\beta}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx.$$

Но в первом и третьем интегралах правой части записанного равенства подынтегральная функция равна нулю, а во втором она равна $f(x)\cos nx$, так что $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx$. Так как по (9) интеграл правой части этого равенства при $n \to +\infty$ стремится к нулю, то и $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx\,dx = 0$. Аналогично доказывается, что и $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

§ 28. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ

Многие функциональные последовательности не являются сходящимися согласно обычному определению сходимости (§ 10). В связи с этим иногда изменяют определение сходимости последовательности, с тем чтобы хотя бы некоторые классы последовательностей, расходящихся в обычном смысле, оказались бы классами сходящихся последовательностей функций в некотором новом смысле.

Введем понятие сходимости последовательности в среднем.

Определение 1. *Последовательность функций* $\{f_n(x)\}$, *интегрируемых на данном сегменте* $[a, b]$, *называется сходящейся в среднем на этом сегменте к некоторой (также интегрируемой на* $[a, b]$*) функции* $f(x)$, *если имеет место равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, dx = 0,$$

или, что равносильно этому, *если последовательность средних квадратичных уклонений* $f(x)$ *от* $f_n(x)$ *сходится к нулю*:

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx} = 0.$$

Ни обычное определение сходимости функциональной последовательности, ни только что данное не содержат друг друга в виде частного случая: существуют последовательности, не сходящиеся в обычном смысле, но сходящиеся в смысле сходимости в среднем, и наоборот. Однако понятие сходимости в среднем является обобщением понятия р а в н о м е р н о й сходимости последовательности функций.

Теорема. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *интегрируемых на* $[a, b]$ *функций сходится на этом сегменте к некоторой функции* $f(x)$ *равномерно, то она сходится к* $f(x)$ *на* $[a, b]$ *и в среднем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подобно тому как это было сделано в теореме 2 (§ 12), здесь прежде всего можно доказать, что предельная функция $f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$. Далее, из условия теоремы вытекает, что по любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ выполняется неравенство: $|f(x) - f_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$ для всех $x \in [a, b]$. Но тогда для тех же n:

$$\left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, dx\right| = \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, dx = 0$, т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ *и в среднем* на $[a, b]$.

Обратное утверждение, однако, неверно. Так, для последовательности с общим членом $f_n(x) = x^n$ на $[0, 1]$ и предельной функцией $f(x) = 0$ для $x \neq 1$ и $f(1) = 1$ (с. 50) имеем:

$$\rho_n^2 = \int_0^1 [0 - f_n(x)]^2 dx = \int_0^1 f_n^2(x)\, dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

и $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n^2 = 0$, так что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к нулю в среднем. Однако она не является равномерно сходящейся на $[0, 1]$ (см. там же).

Понятие сходимости в среднем можно перенести и на функциональные ряды.

Определение 2. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *называется сходящимся в среднем к функции* $S(x)$ *на* $[a, b]$, *если последовательность* $\{S_n(x)\}$ *его частичных сумм сходится на этом сегменте к* $S(x)$ *в среднем, т. е. если*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b [S(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

Теорема 2. *Для того чтобы ряд Фурье* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *функции* $f(x)$, *интегрируемой на сегменте* $[a, b]$, *сходился к ней в среднем на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы неравенство Бесселя обращалось для* $f(x)$ *в равенство, т. е. чтобы выполнялось условие* (равенство Парсеваля):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ в среднем к $f(x)$ (на $[a, b]$) вытекает, что на $[a, b]$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n^2 = 0$. Но тогда из равенства (5) (§ 27) следует, что и

$$\lim_{n \to +\infty} \left\{ \int_a^b f^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \right\} = 0, \qquad (2)$$

откуда вытекает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx$, т. е. выполняется равенство (1).

Обратно, из (1) вытекает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k^2 = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, и потому имеет место равенство (2), а с ним благодаря тому же равенству (5) (§ 27) и равенство $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n^2 = 0\,(a \leqslant x \leqslant b)$, так что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$.

§ 28. ПОЛНОТА И ЗАМКНУТОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этом и последующих параграфах нам часто придется иметь дело с так называемыми кусочно-непрерывными функциями.

Определение 1. *Функция $f(x)$, определенная на данном сегменте $[a, b]$ (за исключением, быть может, конечного числа его точек), называется кусочно-непрерывной на данном сегменте, если она на нем либо непрерывна, либо имеет конечное множество точек разрыва первого рода* (рис. 4).

Так, функция из примера 9 (т. I, с. 48) была кусочно-непрерывной на $[0, 3]$, то же относится к функции примера 1 (т. I, с. 52), рассмотренной, например, на $[-2, 2]$.

Очевидно, кусочно-непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция интегрируема на нем (т. I, с. 482).

Определение 2. *Ортонормированная на данном сегменте $[a, b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной относительно данного класса функций (принадлежащих к интегрируемым на $[a, b]$ функциям), если для любой из функций $f(x)$ этого класса выполняется равенство Парсеваля.*

Определение 3. *Ортонормированная (и вообще ортогональная) на данном сегменте $[a, b]$ система $\{\varphi_n(x)\}$ кусочно-непрерывных функций называется замкнутой относительно класса кусочно-непрерывных функций, если любая функция $f(x)$ в этом классе, ортогональная ко всем функциям данной системы $\{\varphi_n(x)\}$, тождественно равна нулю на множестве своих точек непрерывности (т. е. тождественно равна нулю на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва функции $f(x)$).*

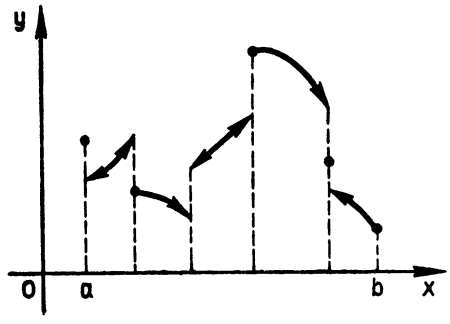


Рис. 4

Примером замкнутой ортонормированной системы является, как можно было бы доказать, тригонометрическая система функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$$

рассмотренная на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Замкнутость и полнота ортонормированной системы функций тесно связаны между собой. Так, имеет место следующая (принимаемая нами без доказательства) т е о р е м а: *относительно класса кусочно-непрерывных на данном сегменте $[a, b]$ функций всякая полная бесконечная система $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированных на этом сегменте функций замкнута на нем.*

Свойство замкнутости системы $\{\varphi_n(x)\}$ на $[a, b]$ есть как бы свойство ее максимальности относительно данного класса функций: замкнутую систему нельзя, оставляя ее ортогональной, расширить за счет пополнения этой системы новой функцией, отличной от функции, которая тождественно равна нулю на сегменте $[a, b]$, исключая, быть может, конечное число его точек.

Теорема. *Две кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющие относительно данной замкнутой ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ кусочно-непрерывных функций один и тот же ряд Фурье, совпадают между собой на этом сегменте, за исключением, быть может, конечного числа его точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим функцию $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Очевидно, что $f(x)$ — снова кусочно-непрерывная на $[a, b]$ функция. Обозначим коэффициенты Фурье функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ соответственно через c_n, c_n' и c_n'' $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\varphi_n(x)\,dx -$$

$$- \int_a^b f_2(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n' - c_n''.$$

Однако по условию у $f_1(x)$ и $f_2(x)$ один и тот же ряд Фурье относительно $\{\varphi_n(x)\}$ и, значит, $c_n = c_n' - c_n'' = 0$ для всех n, т. е. $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, и, следовательно, функция $f(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_n(x)$. Отсюда (условие замкнутости) функция $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ равна нулю на $[a, b]$, исключая, быть может, конечное число точек; откуда получается, что $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in [a, b]$ за тем же возможным исключением.

В частности, отсюда вытекает, что если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то они уже в точности совпадают на нем.

Следствие. *Если для непрерывной (кусочно-непрерывной) на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ ее ряд Фурье относительно замкнутой ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ непрерывных (ку-*

сочно-непрерывных) функций равномерно сходится на этом сегменте (равномерно сходится к кусочно-непрерывной функции), то он сходится на $[a, b]$ *именно к данной функции* $f(x)$ *(к* $f(x)$ *за возможным исключением конечного числа точек этого сегмента).*

Достаточно дать доказательство для случая, указанного в скобках. Пусть ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой кусочно-непрерывной функции $F(x)$. Тогда, по доказанному в § 26 (равенство (2)), $c_n = \int_a^b F(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Но одновременно с этим выполняется и равенство $c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ (по определению ряда Фурье для $f(x)$). Отсюда кусочно-непрерывные функции $F(x)$ и $f(x)$ имеют на $[a, b]$ один и тот же ряд Фурье, а тогда по доказанной теореме будем иметь: $f(x) = F(x)$ на $[a, b]$ (за исключением, возможно, конечного числа точек).

Это следствие может оказаться практически полезным: составив по данной непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ ее ряд Фурье относительно замкнутой ортонормированной на том же сегменте системы непрерывных функций (например, для системы (5), § 25), достаточно убедиться в равномерной сходимости этого ряда, чтобы быть уверенным в том, что этот ряд выражает на $[a, b]$ именно взятую нами функцию.

Пример. Составить для функции $f(x) = x^2$ ее тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ и исследовать этот ряд на сходимость.

Р е ш е н и е. Так как $f(x) = x^2$ — четная функция, то для ее коэффициентов соответствующего ряда Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ имеем по формулам § 26 (см. замечание): $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right) = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}.$$

Таким образом, на $[-\pi, \pi]$

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right].$$

Ряд, стоящий в скобках, сходится на $[-\pi, \pi]$ равномерно (как мажорируемый с помощью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), а $f(x)=x^2$ — функция непрерывная. Тогда по следствию (с. 109) мы можем написать разложение:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

§ 30. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

1. Периодическое продолжение функции. Как уже было отмечено (§ 24), сумма тригонометрического ряда Фурье данной функции $f(x)$ есть функция периодическая. Между тем заданная функция $f(x)$ может и не быть периодической. Поэтому, если мы хотим связать с $f(x)$ ту функцию, которую ее ряд Фурье выражает и вне сегмента $[-\pi, \pi]$, мы вынуждены построить для $f(x)$ ее *периодическое продолжение.*

Определение. *Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, a+2l]$ (интервале $(a, a+2l)$). Функция $F(x)$ называется периодическим продолжением $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$ с периодом $2l$, если $F(x)$ — периодическая функция (периода $2l$), совпадающая на $(a, a+2l)$ с $f(x)$.*

Периодическое продолжение $F(x)$ для $f(x)$ может быть построено следующим образом (рис. 5):

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } a < x < a + 2l, \\ f(x - 2kl) & \text{для } a + 2kl < x < a + 2(k+1)l \end{cases} \quad (1)$$

$(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, или, что то же, $F(x) = f(x - 2kl)$ для $a + 2kl < x < a + 2(k+1)l$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Заметим, что в точках вида $x = a + 2kl$ (и только в этих точках) $F(x)$ оставлена (пока) без определения (и от нас зависит, как ее в этих точках определить): мы не требуем, чтобы $F(x)$ совпадала с $f(x)$ на всем сегменте $[a, a+2l]$, да это часто и невозможно, так как $f(a+2l)$ и $f(a)$, вообще говоря, различные числа; между тем

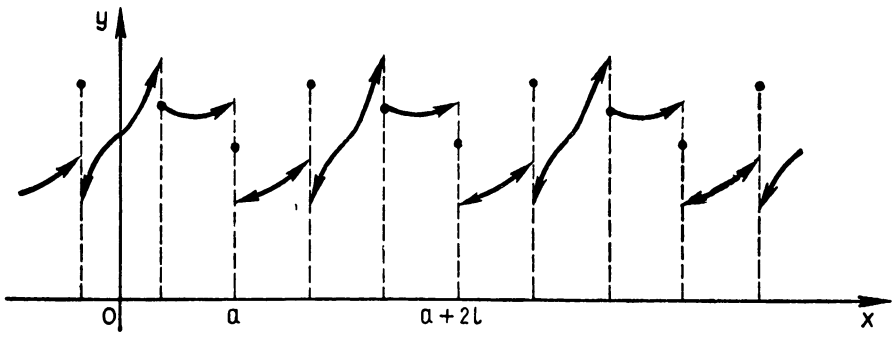


Рис. 5

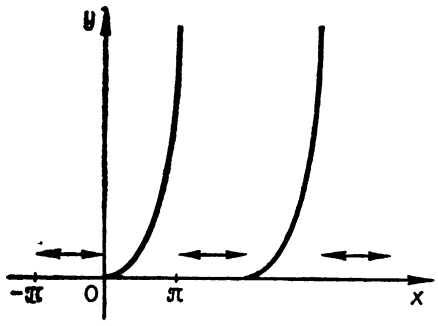


Рис. 6

как в силу периодичности $F(x)$ должно быть $F(a) = F(a + 2l)$, если $F(a)$ определено.

Докажем, что функция $F(x)$ является периодической с периодом $2l$. Действительно, если $a + 2kl < x < a + 2(k + 1)l$, то $a + 2(k + 1)l < x + 2l < a + 2(k + 2)l$, и поэтому по (1) имеем:

$$F(x + 2l) = f[x + 2l - 2(k+1)l] = f(x - 2kl) = F(x).$$

Например, если функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } -\pi \leqslant x < 0, \\ x^2 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

то ее периодическое продолжение с периодом 2π будет иметь вид (рис. 6):

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } (2k-1)\pi < x < 2k\pi, \\ (x - 2k\pi)^2 & \text{для } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \end{cases}$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Пусть теперь $f(x)$ кусочно-непрерывная на $[a, b]$, где $b = a + 2l$, функция. Тогда, очевидно, и $F(x)$ в силу своего определения (см. (1)) будет кусочно-непрерывной функцией на любом сегменте.

В точках вида $\bar{x} = a + 2kl$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) функция $F(x)$ не определена, однако она имеет в этих точках односторонние пределы. Действительно, при $h > 0$ (и $h < 2l$)

$$F(\bar{x} + h) = f(\bar{x} + h - 2kl) = f[(\bar{x} - 2kl) + h] = f(a + h).$$

Но по кусочной непрерывности $f(x)$ на $[a, a + 2l]$ существует $\lim\limits_{h \to +0} f(a + h) = f(a + 0)$, значит, существует и $F(\bar{x} + 0) = \lim\limits_{h \to +0} F(\bar{x} + h)$, причем

$$F(\bar{x} + 0) = f(a + 0). \qquad (*)$$

Аналогично показывается, что $F(\bar{x} - 0)$ существует, причем

$$F(\bar{x} - 0) = f(b - 0). \qquad (**)$$

Мы можем, если надо, доопределить $F(x)$ в точках вида $\bar{x}$, назначая ей одно и то же значение c в каждой из них. При этом $F(x)$ останется кусочно-непрерывной на любом сегменте $[\alpha, \beta]$ и, значит, $\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx$ существует, и величина его не зависит от значения c

(т. I, стр. 482). Отсюда следует, что для любой интегрируемой на $[a, a+2l]$ функции $\varphi(x)$

$$\int_a^{a+2l} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^{a+2l} F(x)\varphi(x)\,dx.$$ В частности, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx, \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

так что коэффициенты рядов Фурье, а значит, и сами эти ряды для $f(x)$ и $F(x)$ на $[-\pi, \pi]$ одинаковы.

2. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Интеграл Дирихле. Пусть дан тригонометрический ряд Фурье: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ некоторой кусочно-непрерывной на $[-\pi, \pi]$ периодической функции $f(x)$ с периодом 2π. Его $(n+1)$-я частичная сумма (обозначим ее через $S_n(x)$) будет:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Пользуясь равенствами (6) (§ 26), мы представим $S_n(x)$ так:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt + \right.$$

$$\left. + \sin kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right]\ ^{*)}.$$

Объединяя записанные интегралы и внося множители $\cos kx$ и $\sin kx$ под знаки соответствующих интегралов, получим:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kt + \sin kx\sin kt)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \qquad (2)$$

---

*) Для большей четкости смысла записи мы меняем в равенстве (6) (§ 26) обозначение переменного x на t.

По известной формуле

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

($\varphi \neq 2m\pi$, m целое) можем записать:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\,(t-x) = \frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \ldots + \cos n(t-x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}.$$

Выполненное преобразование непосредственно пригодно лишь при $t - x \neq 2m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), но при $t - x = 2m\pi$ преобразуемая сумма (как это видно непосредственно) равна $\frac{1}{2} + n$. Такое же значение для этих t мы будем приписывать и правой части полученного равенства. Тогда функция $\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}$ от t (x фиксировано), или, что то же, функция $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}$ от z будет непрерывной и в точках $t = x + 2m\pi$ ($z = 2m\pi$):

$$\lim_{t\to x+2m\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}} = \lim_{z\to 2m\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}} =$$

$$= \lim_{z\to 2m\pi} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\cos\frac{z}{2}} = n + \frac{1}{2}.$$

Подставляя теперь значение преобразованной суммы $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\,(t-x)$ в выражение для $S_n(x)$ (см. (2)), придем к равенству:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt. \tag{3}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называют интегралом Дирихле. Преобразуем этот интеграл. Полагая $t - x = z$, будем иметь:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Так как $f(x)$, а значит, и $f(z+x)$ (z переменно) кусочно-непрерывны и имеют период 2π, то в записанном для $S_n(x)$ выражении можно, не нарушая равенства, заменить пределы интегрирования на $-\pi$ и π (см. § 24, п. 2, равенство (*))*):

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz. \tag{4}$$

Формула (4) и дает нам интегральное представление частичной суммы ряда Фурье функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$.

Докажем с помощью (4), что при любом натуральном n

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz = 1. \tag{5}$$

Рассмотрим на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = 1$. Согласно формулам (6) (§ 26) имеем для этой функции:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0,\ b_n =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. все коэффициенты Фурье функции $f(x)$, кроме a_0, равны нулю и $S_n(x) = \frac{a_0}{2} = 1$ для всех x из $[-\pi, \pi]$. Учитывая это, а также то, что $f(z+x) = 1$, получим из (4) требуемое:

*) При выводе равенства (*) мы опирались только на то, что интеграл от $f(x)$ на $[x, x+T]$ существует и что $f(x)$ имеет период T ($T = 2l$). Эти условия выполняются и здесь.

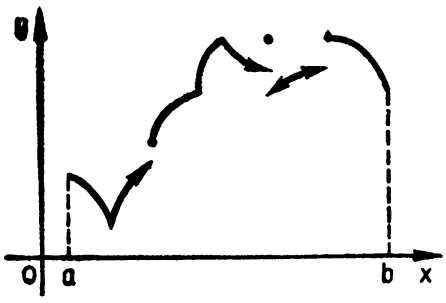


Рис. 7

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

3. Достаточные условия разложимости функций в ряды Фурье. Существует целый ряд таких условий различной силы.

Одно из этих условий содержит требование существования у данной функции $f(x)$ кусочно-непрерывной производной на данном сегменте $[a, b]$ — такую функцию называют кусочно-гладкой на этом сегменте (рис. 7). Это требование означает, что $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f(x)$ имеет односторонние производные. Если x_0 — одна из таких точек, то это означает, что существуют конечные пределы $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, называемые односторонними производными (соответственно правой и левой) функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h},$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h} \qquad (6)$$

(для точек $x_0 = a$ или $x_0 = b$ здесь речь идет соответственно только о $f'_+(x_0) = f'_+(a)$ или о $f'_-(x_0) = f'_-(b)$).

Относительно ряда Фурье кусочно-гладкой функции справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если $f(x)$ — кусочно-гладкая на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция, то ряд Фурье этой функции сходится на этом сегменте, причем он сходится к значению данной функции $f(x)$ в каждой точке ее непрерывности из $(-\pi, \pi)$, к числу $S_0 = \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$ в каждой другой точке $x_0 \neq \pm\pi$ и к числу $S_1 = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ в точках $x_0 = \pm\pi$.*

Предварительно заметим следующее: мы можем (с. 111) периодически продолжить $f(x)$ с периодом 2π за сегмент $[-\pi, \pi]$. Сделав это и полагая в равенствах (*) и (**) (с. 112) соответственно $\bar{x} = \pi$ и $\bar{x} = -\pi$ при $a = -\pi$, $b = \pi$, можно получить равенства:

$$F(\pi + 0) = f(-\pi + 0) \text{ и } F(-\pi - 0) = f(\pi - 0).$$

Так как, далее, на $(-\pi, \pi)$ $F(x) \equiv f(x)$ и так как ряды Фурье для $F(x)$ и $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ совпадают (с. 113), то при доказательстве теоремы различие между $F(x)$ и $f(x)$ является несущественным,

и мы не будем здесь различать их. Так, только что приведенные равенства запишутся: $f(\pi+0)=f(-\pi+0)$, $f(-\pi-0)=f(\pi-0)$*). Отсюда число s_1 можно записать так:

$$s_1=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}.$$

Но в таком случае число s_1 включается как частный случай в выражение для s_0 (при $x_0=\pm\pi$). Точно так же, если x_0 — точка непрерывности для $f(x)$, то $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ и $s_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=f(x_0)$.

Поэтому доказываемую теорему можно сформулировать так: *построенный на* $[-\pi,\pi]$ *ряд Фурье кусочно-гладкой на* $[-\pi,\pi]$ *функции* $f(x)$ *сходится в каждой точке* x *этого сегмента и притом к* $S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье для $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$. Составим разность: $R_n(x)=S_n(x)-S(x)$. Пользуясь соотношением (4), можем написать:

$$R_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz-S(x).$$

Но по (5) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}dz=1$, поэтому $S(x)$ можно представить в таком виде:

$$S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}S(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}dz$$

(см. выше выражение для $S(x)$). Отсюда

$$R_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz-$$

*) Непосредственно о $f(\pi+0)$ и о $f(-\pi-0)$ нельзя было говорить, так как по условию для $|x|>\pi$ функция $f(x)$ не была задана.

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+0) + f(x-0)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz. \qquad (7)$$

Преобразуем первый интеграл правой части (7):

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz = \int_0^{\pi} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz +$$

$$+ \int_{-\pi}^{0} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменного, $z = -u$, получим:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz = \int_0^{\pi} f(x-u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\, du =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{f(x-z)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz.$$

Отсюда

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz = \int_0^{\pi} [f(x+z) +$$

$$+ f(x-z)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz.$$

На основании сделанного преобразования $R_n(x)$ можно записать так:

$$R_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+z) + f(x-z)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+0) + f(x-0)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz.$$

Разбивая каждый из этих интегралов на два, а затем, объединяя их по-иному, мы придем к следующему выражению для $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z) - f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-z) - f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz = I_1 + I_2. \qquad (8)$$

Докажем, что каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет при $n \to +\infty$ предел, равный нулю. Обозначим: $\frac{f(x+z) - f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}} = \varphi(z)$- ($x$ фиксировано), тогда интеграл I_1 можно представить следующим образом:

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(z)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(z)\left(\sin nz\cos\frac{z}{2} + \cos nz\sin\frac{z}{2}\right)dz,$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_1(z)\cos nz\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_2(z)\sin nz\,dz, \qquad (9)$$

где положено $\varphi_1(z) = \varphi(z)\sin\frac{z}{2}$, $\varphi_2(z) = \varphi(z)\cos\frac{z}{2}$.

Функция $\varphi(z)$ вместе с $f(z)$ кусочно-непрерывна на любом сегменте, содержащемся в $[-\pi, \pi]$ и не содержащем нуля. Но и в точке $z = 0$ эта функция имеет правый предел. Действительно,

$$\varphi(z) = \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}} = \frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \cdot \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z}, \qquad (10)$$

и по условию кусочной непрерывности производной $f'(x)$ на $[-\pi, \pi]$ существует правая производная $f'_+(x)$ при любом x из $[-\pi, \pi]$ (не исключая и точки $x = \pi$), т. е. существует предел

$$\lim_{z\to+0}\frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} = f'_+(x).$$

Тогда из (10) следует $\left(\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} = 1\right)$, что существует ко-

нечный предел $\lim\limits_{z\to+0}\varphi(z)=1$ и $\varphi(z)$ является кусочно-непрерывной на $[0, \pi]$ функцией. Вместе с ней окажутся кусочно-непрерывными на $[0, \pi]$ также $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Но тогда по замечанию (с. 105) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi_1(z)\cos nz\,dz=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi_2(z)\sin nz\,dz=0.$$

Отсюда, пользуясь равенством (9), мы можем заключить, что и

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(z)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz=0.$$

Совершенно аналогично показывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}I_2=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-z)-f(x-0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz=0.$$

Но тогда из (8) мы будем иметь для всех x из $[-\pi, \pi]$: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, и, значит, ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, а для его суммы $S(x)$ имеем выражение:

$$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную, то ее ряд Фурье сходится на $[-\pi, \pi]$, причем к функции $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$, а к числу $s_1=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ в точках $x=\pm\pi$.*

Для доказательства стоит только заметить, что здесь

$$f(-\pi+0)=f(-\pi)\text{ и }f(\pi-0)=f(\pi).$$

В частности, если еще $f(-\pi)=f(\pi)$, то этот ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, ибо тогда $s_1=f(-\pi)=f(\pi)$.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна вместе со своей первой производной на данном сегменте $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье, построенный по этой функции на этом сегменте, сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$, причем сумма его равна $S(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$, где $F(x)$ — периодическое продолжение (с периодом 2π) функции $f(x)$ за $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Так как совокупностью сегментов вида $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) покрывается вся прямая, то любую точку x_1 прямой можно поместить в один из таких сегментов, а значит, представить в следующем виде: $x_1=$

$= x_0 + 2k\pi$ (k целое), где $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Но на сегменте $[-\pi, \pi]$ ряд Фурье функции $f(x)$ сходится, значит, он будет сходиться и в каждой точке вида x_1 (с. 94,95), т. е. в каждой точке интервала $(-\infty, +\infty)$. При этом и сумма ряда Фурье будет функцией периодической с периодом 2π (см. там же), откуда, в частности, $S(x_0 + 2k\pi) = S(x_0)$, т. е. (с. 111)

$$s_1 = S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{F(x_0+2k\pi+0)-F(x_0+2k\pi-0)}{2} = \frac{F(x_1+0)-F(x_1-0)}{2}.$$

Следствие 3. *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-непрерывна (непрерывна) на $[-\pi, \pi]$ и имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную, то ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке x к числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (к значению $f(x)$).*

Это следствие прямо вытекает из следствия 2 (при $F(x) = f(x)$).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ x \text{ для } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Ряд Фурье этой функции на $[-\pi, \pi]$ имеет вид (с. 101):

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}(\cos n\pi - 1)\frac{\cos nx}{n^2} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right]. \qquad (11)$$

Функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, и ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } -\pi \leqslant x < 0, \\ 1 \text{ для } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

кусочно-непрерывна на этом сегменте (она имеет на нем единственную точку разрыва (I рода): $x = 0$). Поэтому по следствию 1 ряд (11) сходится на $(-\pi, \pi)$ к $f(x)$, а в точках $x = \pm\pi$ к числу $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Мы можем, таким образом, записать:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}(\cos n\pi - 1)\frac{\cos nx}{n^2} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right],$$

или

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{2}{\pi}\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\sin x}{1} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots\right). \qquad (12)$$

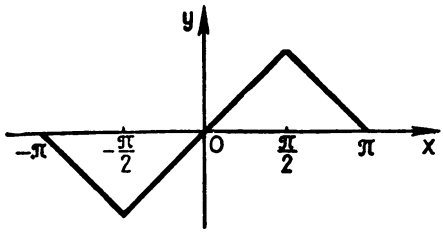


Рис. 8

В точках $x = \pm\pi$ сумма ряда из (12) равна $\frac{\pi}{2}$. Отсюда между прочим следует (при $x = \pi$), что

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots\right),$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = |x|$.

Р е ш е н и е. Функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на нем ($f'(x)$ разрывна только в точке $x = 0$); кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$, значит, ее ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ сходится к этой функции (следствие 1). Так как $f(x)$ — четная функция, то ее ряд Фурье содержит только косинусы и a_n определяется по формуле 7 (§ 26). Учитывая при этом, что на $[0, \pi]$ $f(x) = |x| = x$, мы найдем при $n = 0$:

$$a_n = a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ а при } n \neq 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1), \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2}$$

($k = 1, 2, \ldots$). Меняя здесь k снова на n, приходим к следующему разложению:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

Пример 3. Разложить на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье функцию (рис. 8)

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{для } -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ x & \text{для } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{для } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем кусочно-непрерывную производную: $f'(x) = 1$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $f'(x) = -1$ для остальных $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ из $[-\pi, \pi]$, т. е. $f(x)$ — кусочно-гладкая и непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$. Следовательно, ее ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ (следствие 1).

Легко видеть, что $f(x)$ — нечетная функция и $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx.$$

Сделав во втором интеграле правой части равенства подстановку $x = \pi - z$, получим:

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sin(n\pi - nz)\,dz = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sin nz\,dz & \text{при } n = 2m, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sin nz\,dz & \text{при } n = 2m-1, \end{cases}$$

откуда $b_{2m} = 0$, а $b_{2m-1} = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sin(2m-1)z\,dz = \dfrac{4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)^2}$.

Искомое разложение, следовательно, имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\sin(2m-1)x.$$

Если $f(x)$ периодически продолжить на $(-\infty, +\infty)$, то полученное разложение останется верным и на всем интервале $(-\infty, +\infty)$ (следствие 3).

Замечание. Помимо указанного выше признака сходимости ряда Фурье, существует целый ряд других признаков. Одним из них является так называемый признак Дирихле: если функция $f(x)$ кусочно-монотонна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем не более чем конечное число точек разрыва первого рода, то ее ряд Фурье сходится на $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$ в каждой точке x_0 непрерывности $f(x)$ из $(-\pi, \pi)$ и к сумме $S_0 = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$*) в каждой точке разрыва x_0. (Если при этом $f(x)$ — периодическая функция периода 2π, то сходимость ряда Фурье к S_0 будет обеспечена на $(-\infty, +\infty)$.)

Этот признак уже является достаточно сильным, он не требует ни кусочной непрерывности производной $f'(x)$ (ср. с теоремой, с. 116), ни даже самого факта ее существования.

---

*) Если $x_0 = \pm\pi$, то здесь, как и выше, вместо написанной дроби фигурирует дробь $\dfrac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

§ 81. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ ОБЩЕГО ВИДА

Часто бывает нужно в приложениях разложить в ряд Фурье функцию на произвольном сегменте данной длины $2l$, например, на сегменте $[-l, l]$. В таком случае естественно потребовать, чтобы в общем тригонометрическом ряде $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ все функции $\cos n\omega x$ и $\sin n\omega x$ ($n = 1, 2, \ldots$) имели период $2l$, т. е. положить $\omega = \frac{\pi}{l}$, тогда ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$ будет иметь вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (1)$$

Пусть $f(x)$— кусочно-непрерывная на $[-l, l]$ функция. Введем вспомогательную функцию: $F(z) = f\left(\frac{l}{\pi} z\right)$. Эта функция определена на $[-\pi, \pi]$, так как, когда z изменяется, например, монотонно от $-\pi$ до π, $x = \frac{l}{\pi} z$ изменяется (также монотонно) от $-l$ до l.

Очевидно, что функция $F(z)$ будет на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывной: по теореме о непрерывности сложной функции $F(z)$ может быть разрывной только в тех точках z из $[-\pi, \pi]$, для которых в соответствующих точках $x \in [-l, l]$ разрывна функция $f(x)$. При этом, если x_0—точка разрыва кусочно-непрерывной функции $f(x)$, то существуют пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, а тогда по теореме о пределе сложной функции существуют и пределы $F(z_0 + 0)$ и $F(z_0 - 0)$, где $z_0 = \frac{\pi x_0}{l}$, так что $F(z)$ имеет односторонние пределы в соответствующей точке z_0 из $[-\pi, \pi]$.

Точно так же мы убедились бы, что если $f(x)$ — кусочно-гладка на $[-l, l]$, то $F(x)$ будет кусочно-гладкой на $[-\pi, \pi]$. Наконец, если $f(x)$ — периодическая функция с периодом $2l$, то и $F(z)$ будет периодической с периодом 2π: $F(z + 2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(z + 2\pi)\right] = f\left(\frac{l}{\pi} z + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi} z\right) = F(z)$.

Но в таком случае на $f(x)$, на $[-l, l]$, по отношению к ряду (1) переносится теорема § 30. В самом деле, для кусочно-гладкой на $[-\pi, \pi]$ функции $F(z)$ ее ряд Фурье будет сходиться на $[-\pi, \pi]$, причем к функции

$$S_1(z) = \frac{F(z+0) + F(z-0)}{2}.$$ Тогда

$$S_1(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

где a_0, a_n, b_n определяются по формулам 6 (§ 26). Полагая здесь $z = \frac{\pi}{l} x$, найдем:

$$S(x) = S_1\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $x = \frac{l}{\pi} z$ изменяется от $-l$ до l. При этом

$$S(x) = S_1\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{F\left(\frac{\pi}{l} x + 0\right) + F\left(\frac{\pi}{l} x - 0\right)}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Таким образом, действительно, ряд (1) в указанных условиях сходится, и притом к $S(x) = \frac{f(x+0) + (x-0)}{2}$. В частности, в каждой точке x_0 непрерывности $f(x)$ он сходится к $f(x_0)$. При этом a_0, a_n, b_n определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z)\, dz, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz\, dz, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz\, dz.$$

Полагая здесь $z = \frac{\pi}{l} x$, найдем: $x = \frac{l}{\pi} z$ и

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} F\left(\frac{\pi}{l} x\right) \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz\, dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz\, dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{4}$$

Как и в § 26, здесь для четной (нечетной) функции ряд Фурье (1) будет содержать только косинусы (синусы) от аргументов $\frac{n\pi x}{l}$ и коэффициенты a_n (b_n) могут быть вычислены по формуле, аналогичной формуле (7) (соответственно (8), § 26).

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $2l = 2$, заданную на сегменте $[-1,1]$ ($l = 1$) равенствами (рис. 9):

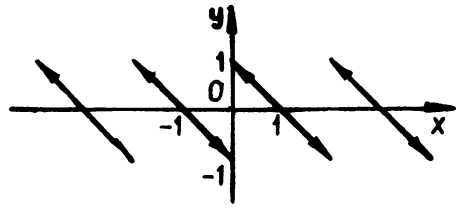


Рис. 9

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1) \text{ для } -1\leqslant x<0,\\ 0 \text{ для } x=0,\\ -x+1 \text{ для } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как $f(-1)=f(1)$ $(=0)$, то рассматриваемая периодическая функция задана на всем интервале $(-\infty, +\infty)$. Она кусочно-гладкая, причем единственной точкой разрыва на $[-1,1]$ как для $f(x)$, так и для $f'(x)$ является точка $x=0$. Кроме того, $f(0)=0=\frac{1+(-1)}{2}=\frac{f(+0)+f(-0)}{2}$. В таком случае ряд Фурье для $f(x)$, составленный на $[-1,1]$, сходится на $(-\infty,+\infty)$, и причем всюду к $f(x)$ (ср. со следствием 3, с. 121).

Как легко убедиться, $f(x)$ — нечетная функция, и поэтому

$$a_n=0 \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=2\int_0^l f(x)\sin n\pi x\,dx=$$

$$=2\int_0^1(-x+1)\sin n\pi x dx=2\left(-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi+\frac{1}{n\pi}\right)=\frac{2}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

§ 32. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СЕГМЕНТЕ $[0,\ l]$

Часто бывает нужно данную функцию $f(x)$ разложить на $[0,\ l]$ (на $(0,\ l)$) только по косинусам или только по синусам.

Нетрудно установить ортогональность на $[0,\ l]$ следующих систем функций:

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l};\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \ldots \qquad (*)$$

и

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots. \qquad (**)$$

Таким образом, можно говорить о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье по указанным системам. Для получения искомого разложения можно поступить так: продолжить заданную на $[0,\ l]$ функцию $f(x)$ как четную (для системы (*)) или как нечетную (для системы (**)) функцию на $[-l,\ l]$.

Для «четного продолжения» полагаем (рис. 10 а):

$$f_1(x)=\begin{cases}f(-x) \text{ для } -l\leqslant x<0,\\ f(x) \text{ для } 0\leqslant x\leqslant l,\end{cases} \qquad (1)$$

а для нечетного (рис. 10 б):

$$f_2(x)=\begin{cases}-f(-x) \text{ для } -l\leqslant x<0,\\ f(x) \text{ для } 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \qquad (2)$$

Если $f(x)$ — кусочно-гладка на $[0,\ l]$, то и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будут кусочно-гладкими на $[-l,\ l]$. Отсюда мы можем разло-

жить как $f_1(x)$, так и $f_2(x)$ на $[-l, l]$ в ряд Фурье*). Но $f_1(x)$— четная, а $f_2(x)$ — нечетная на $[-l, l]$ функции, и соответствующие им на $[-l, l]$ ряды Фурье будут содержать соответственно только косинусы или только синусы. Поскольку на $[0, l]$ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают с $f(x)$ (см. (1) и (2)), то мы получаем, таким образом, для $f(x)$ требуемые разложения на $[0, l]$. При этом для случая четного продолжения будем иметь:

$$b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (3)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

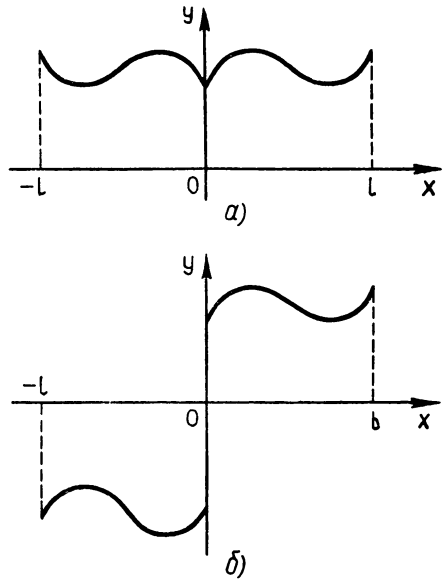


Рис. 10

а для нечетного

$$a_n = 0,\quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (4)$$

Таким образом, соответствующие коэффициенты Фурье можно отыскивать прямо по $f(x)$, пользуясь одной из формул (3) или (4) и не обращаясь всякий раз к представлениям (1) или (2). При этом для четного продолжения $f_1(+0) = f_1(-0) = f(+0)$, и ряд Фурье $f(x)$ будет сходиться в точке $x = 0$ к числу $f(+0)$. Аналогично в точке $x = l$ этот ряд будет сходиться к числу $f(l - 0)$. В частности, если $f(x)$ будет непрерывна в точке 0 (точке l, или в обеих этих точках), то ряд Фурье $f(x)$ будет сходиться к ней и на $[0, l)$ (на $(0, l]$, на $[0, l]$).

Для нечетного продолжения уже $s_0 = 0$ на концах сегмента $[0, l]$ и, вообще говоря, в этих точках ряд Фурье не будет сходиться к $f(x)$.

Пример. Разложить функцию $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные $(0 \leqslant x \leqslant l)$ в ряд Фурье на $[0, l]$: 1) только по косинусам аргументов вида $\frac{n\pi x}{l}$; 2) только по синусам таких же аргументов.

*) За возможным исключением в конечном числе точек из $[-l, l]$.

Р е ш е н и е. 1) Для четного продолжения по (3):

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l (ax+b)\,dx = al + 2b, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l (ax+b)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2}{l}\cdot\left[(ax+b)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{al^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l = -\frac{2al}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ для четных } n, \\ -\dfrac{4al}{n^2\pi^2} \text{ для нечетных } n, \end{cases}$$

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4al}{(2k-1)^2\pi^2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$ax + b = \left(\frac{al}{2} + b\right) - \frac{4al}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{l}}{(2k-1)^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{5}$$

В частности, при $b = 0$, $a = 1$ получаем из (5):

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

2) Для нечетного продолжения по (4):

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l (ax+b)\sin\frac{n\pi x}{l}\,ax = \frac{2}{l}\left[-(ax+b)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{al^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l =$$

$$= \frac{2}{n\pi}[b - (al+b)(-1)^n].$$

Отсюда

$$b_{2k} = -\frac{al}{k\pi}; \quad b_{2k-1} = \frac{2(2b+al)}{(2k-1)\pi} \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$ax + b = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2b+al}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l} - \frac{al}{2k}\sin\frac{2k\pi x}{l}\right], \quad 0 < x < l.$$

В частности, при $b = 0$, $a = 1$ получим:

$$x = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (0 < x < l).$$

ГЛАВА V.

ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При изучении функций нескольких переменных (гл. VI) нам придется опираться на ряд понятий, связанных с точечными множествами. Перейдем к рассмотрению этих понятий.

§ 33. ПРОСТЕЙШИЕ ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть E_0 — какое-нибудь (непустое) множество точек плоскости (пространства), отнесенных к некоторой прямоугольной системе координат. Тогда каждой точке M_0 этого множества соответствует единственная пара (x, y) (тройка (x, y, z)) действительных чисел — координат взятой точки, так что мы можем самому множеству E_0 поставить в соответствие некоторое множество E упорядоченных пар (x, y) (троек (x, y, z)) действительных чисел. Обратно, каждому такому множеству E мы можем сопоставить множество E_0 из точек плоскости (пространства), координаты которых образуют пары (тройки), принадлежащие E. В силу этого соответствия при составлении терминов или проведении доказательств, касающихся элементов из E, мы можем пользоваться геометрическим языком.

В частности, всякое множество E, состоящее из тех или иных пар (троек) действительных чисел x и y (x, y и z), будем называть *двумерным* (трехмерным) *точечным множеством*, а его элементы (x, y) (соответственно (x, y, z)) — *точками*. Множество E_0 будем при этом называть *геометрическим образом множества* E, а множество E — *арифметическим заданием множества* E_0. Так, множеству $\widetilde{E}$ всех пар (x, y) (троек (x, y, z)) действительных чисел соответствует в качестве геометрического образа $\widetilde{E}_0$ всякая плоскость (все пространство). Такое множество $\widetilde{E}$ называется *арифметической координатной плоскостью* (*арифметическим координатным пространством*), а множество $\widetilde{E}_0$ образов этих точек — *геометрической координатной плоскостью* (*геометрическим координатным пространством*).

Известно, что множество E_0 можно задать с помощью уравнений или неравенств, выполняющихся для координат его точек, т. е. для компонентов пар (троек) соответствующего множества E (и только точек этого множества). Так, неравенство $y < kx + b$ определяет на геометрической координатной плоскости (или, корот-

ко, геометрически) множество точек, лежащих ниже прямой $y = kx + b$; неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ определяется геометрически множество всех точек прямоугольника, ограниченного прямыми: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. Точно так же, например, неравенствами: $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$; $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$; $c_1 \leqslant z \leqslant c_2$ геометрически определяется в пространстве прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$, $z = c_2$, а неравенством $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r$ $(r > 0)$ — «внутренность» шара с центром в точке (a, b, c) и радиусом r (т. е. шар без своей шаровой поверхности).

§ 34. n-МЕРНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА. ЕВКЛИДОВО n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение 1. *Всякое множество E, состоящее из некоторых упорядоченных систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется n-мерным точечным множеством, а его элементы — точками этого множества (n-мерными точками). Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при этом называют координатами точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Так как реальное пространство трехмерно, то его образы не более чем трехмерны и описываются арифметически n-мерными точечными множествами с $n \leqslant 3$. Однако по аналогии и при $n > 3$ мы будем сохранять при описании множеств, состоящих из упорядоченных систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел, геометрический язык. Множество всех таких систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел назовем *арифметическим n-мерным пространством*, его элементы («точки») будем обозначать (по аналогии со случаем $n \leqslant 3$) большими буквами латинского алфавита A, B, C, ..., M, N, P и т. п., записывая вслед за обозначением «точки» ее координаты, например: $A\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Следует ясно представлять себе при этом, что для $n > 3$ арифметическое n-мерное пространство есть не более чем удобная абстракция.

По аналогии с тем, как это делается для пространства трех, двух или одного измерения, и в случае произвольного n вводят понятие расстояния между двумя точками.

Определение 2. *Расстоянием MN между точками $M\,(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$ и $N\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного пространства называется число*

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (1)$$

Если взять $n = 3$ или $n = 2$, то мы будем иметь обычную формулу для расстояния между двумя точками в пространстве или на плоскости (а при $n = 1$ — и на прямой).

Арифметическое n-мерное пространство, в котором по (1) введено понятие расстояния между каждыми двумя точками, называют *евклидовым n-мерным пространством*. Его обозначают через R^n.

В частности, мы можем говорить теперь о евклидовой плоскости ($n = 2$) и евклидовом трехмерном пространстве ($n = 3$).

Ниже вводятся определения основных точечных множеств в R^n (определения 3—7).

Определение 3. *n-мерным открытым (замкнутым) параллелепипедом в пространстве R^n, заданным действительными числами a_i, b_i, где $b_i > a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), называется множество всех точек этого пространства, координаты которых удовлетворяют неравенствам:*

$$a_i < x_i < b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

$$(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i) \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2'}$$

В частности, если в (2) (в (2')) $b_i - a_i = 2a$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то такой параллелепипед называют n-мерным кубом. Он также, соответственно бывает открытым и замкнутым. При $n = 3$ ($n = 2$) определение 3 совпадает с определением обычного параллелепипеда (прямоугольника).

Определение 4. *n-мерным (замкнутым) шаром радиуса r ($r > 0$) с центром в данной точке A ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) называется множество всех точек M ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) пространства R^n, координаты которых удовлетворяют неравенству:*

$$MA = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \leqslant r, \tag{3}$$

а n-мерной сферой того же радиуса с центром во взятой точке называется множество всех точек M ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) этого пространства, для которых в (3) имеет место только знак равенства: $MA = r$.

В случае $n = 3$ по этому определению имеем арифметические определения замкнутого шара и обычной сферы трехмерного евклидова пространства, а при $n = 2$ — замкнутого круга на плоскости и обычной окружности.

Определение 5. *n-мерной параллелепипедальной окрестностью данной точки M_0 ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$) называется множество точек M ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) пространства R^n, координаты которых удовлетворяют неравенствам: $|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где δ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — некоторые действительные числа.*

В частности, если $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta$, то n-мерную параллелепипедальную окрестность называют *n-мерной кубической δ-окрестностью*. Она определяется неравенствами:

$$|x_1 - x_1^0| < \delta, \ |x_2 - x_2^0| < \delta, \ \ldots, \ |x_n - x_n^0| < \delta. \tag{4}$$

Число 2δ называют при этом ребром кубической окрестности.

Определение 6. *n-мерной сферической r-окрестностью данной точки A ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) (или открытым шаром радиуса r с центром в этой точке) называется множество всех точек M ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) с координатами, удовлетворяющими неравенству:*

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < r. \tag{5}$$

При $n = 2; 3$ эти определения выражают понятия двумерной и трехмерной окрестности. Так, двумерная «кубическая» (квадратная) окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ есть множество всех точек (x, y) плоскости, для которых выполняются неравенства: $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, а двумерная сферическая (круговая) r-окрестность той же точки определяется неравенством: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$.

Теорема. *Для каждой кубической (сферической) окрестности данной точки A найдется сферическая (кубическая) окрестность этой точки, содержащаяся в данной кубической (сферической) окрестности.*

Доказательство. В самом деле, если неравенствами (4) (где вместо чисел x_i^0 взяты числа a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ задана некоторая кубическая δ-окрестность данной точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то, взяв $r = \delta$, мы получим, что из неравенства (5), в силу очевидных неравенств

$$|x_i - a_i| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

будут вытекать и неравенства (4), т. е. любая точка полученной сферической r-окрестности будет принадлежать и кубической окрестности (4).

Пусть теперь неравенствами (5) задана некоторая сферическая окрестность данной точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда, приняв $\delta = \frac{r}{\sqrt{n}}$, мы найдем, что при таком δ из неравенств (4) (с той же заменой, что и выше) будет вытекать и неравенство (5): поскольку $|x_i - a_i| < \delta = \frac{r}{\sqrt{n}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{n} n} = r$, т. е. каждая точка найденной кубической окрестности будет и точкой данной сферической окрестности.

Определение 7. *Множество E точек пространства R^n называется ограниченным, если можно указать такое постоянное число $r > 0$, что для каждой из точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого множества, расстояние OM от «начала координат» (точки $O(0, 0, \ldots, 0)$) меньше r: $OM < r$, т. е. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < r$ (так что все точки данного множества E содержатся в некоторой сферической r-окрестности точки O).*

Вместо сферической окрестности здесь можно было бы говорить и о кубической окрестности.

В n-мерном евклидовом пространстве можно ввести также понятие линии и, в частности, непрерывной линии.

Определение 8. *Пусть имеется n функций:*

$$x_1 = \varphi_1(t), \; x_2 = \varphi_2(t), \; \ldots, \; x_n = \varphi_n(t), \qquad (6)$$

заданных на одной и той же области определения D. Тогда множество L всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *пространства* R^n, *координаты которых определяются равенствами* (6), *назовем линией (кривой) в* R^n, *а сами равенства* (6) — *уравнениями этой линии. Если при этом все функции* $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *определены и непрерывны на некотором сегменте* $[t_0, t_1]$ *(интервале* $(-\infty, +\infty)$*), то линия называется непрерывной линией (кривой) или кривой Жордана* (ср. т. I, с. 346).

Если для непрерывной кривой с уравнениями (6) различным t из $[t_0, t_1]$ (из $(-\infty, +\infty)$) соответствуют по (6) различные точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства*), то кривая называется *простой кривой.*

Определение 9. *Если для простой кривой* (6) *функции* $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *на взятом промежутке* $[t_0, t_1]$ *(на* $(-\infty, +\infty)$*) имеют непрерывные производные* $\varphi_i'(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *не обращающиеся одновременно в нуль на этом промежутке, то кривую* (6) *называют гладкой кривой на* $[t_0, t_1]$ *(на* $(-\infty, +\infty)$**).

Если сегмент $[t_0, t_1]$ можно разбить на конечное число промежутков, внутри каждого из которых простая кривая L оказывается гладкой, то она называется *кусочно-гладкой* на $[t_0, t_1]$ (на $(-\infty, +\infty)$.

§ 35. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ n-МЕРНОГО ТОЧЕЧНОГО МНОЖЕСТВА. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА. ОБЛАСТЬ

Определение 1. *Предельной точкой данного множества E точек пространства* R^n *называется такая точка* $M_0 \in R^n$, *в любой окрестности которой имеется хотя бы одна отличная от* M_0 *точка M этого множества.*

Как и для случая одномерного пространства, из этого определения следует, что, если M_0 — предельная точка для E, то в любой окрестности этой точки содержится бесконечное множество точек, принадлежащих E.

Предельная точка M_0 множества E может как принадлежать этому множеству, так и не принадлежать ему. Например, для множества всех точек плоскости вида: $M\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$, где m и n — любые натуральные числа, точка 0 (0, 0) — предельная, но она не принадлежит этому множеству. Для множества E, определяемого неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$ (прямоугольник), все его предельные точки принадлежат множеству E. Круговая r-окрестность точки имеет предельные точки, не принадлежащие ей (граничные).

---

*) За исключением, быть может, точек, соответствующих концам сегмента $[t_0, t_1]$; если эти точки совпадают, то простая кривая называется простой замкнутой кривой (линией).

**) Строго говоря, здесь речь идет о существовании хотя бы одного такого представления (6) для кривой.

Определение 2. *n-мерное (непустое) точечное множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, и незамкнутым, если оно не содержит хоть одной своей предельной точки.*

Так, множество точек прямоугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ является замкнутым, а множество точек квадратной (круговой) окрестности — незамкнутым.

С точки зрения приведенного определения замкнутым будет и множество всех точек пространства R^n, в частности множество всех точек плоскости. (Плоскость же с удаленной из нее какой-либо окрестностью, прямой уже не будет замкнутым множеством точек.) Тривиальным образом будет замкнуто и любое n-мерное точечное множество, вовсе не имеющее предельных точек (например, любое конечное n-мерное точечное множество): множество его предельных точек пусто, а пустое множество считается принадлежащим любому множеству.

Определение 3. *Точка A данного n-мерного множества E называется внутренней его точкой, если существует такая окрестность этой точки, которая целиком состоит из точек данного множества.*

Так, для данного круга радиуса r на плоскости любая точка, отстоящая от его центра на расстояние, меньшее r, будет внутренней точкой этого круга, а всякая другая точка плоскости, в частности точка окружности этого круга, уже не будет внутренней для него.

Для множества всех точек пространства любая точка является внутренней; то же относится и к точкам любой n-мерной окрестности.

Определение 4. *n-мерное точечное множество называется открытым, если все его точки являются внутренними.*

Такова, например, всякая сферическая окрестность S радиуса r. Открытой является и всякая кубическая и вообще параллелепипедальная n-мерная окрестность той или иной точки.

Замечание 1. Точечное множество может и совсем не иметь внутренних точек; таково, например, множество точек сторон данного треугольника (на плоскости).

Замечание 2. Существует множество, одновременно и замкнутое и открытое; таково, например, само пространство R^n.

Определение 5. *Точка M пространства R^n называется граничной для данного непустого множества E точек этого пространства, если в любой окрестности этой точки имеются точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству E. Совокупность всех граничных точек данного множества M называется его границей.*

Так, можно доказать, что для n-мерного шара S радиуса r с центром в точке A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ его «поверхность», т. е. соответствующая ему сфера σ, есть его граница.

Для всего пространства R^n (например, для всей плоскости: $n = 2$) граница, очевидно, есть пустое множество. Напротив, су-

ществуют точечные множества, которые совпадают со своей границей, например каждое конечное множество точек; другим примером подобного рода может служить множество точек, лежащих на сторонах какого-либо треугольника (на плоскости).

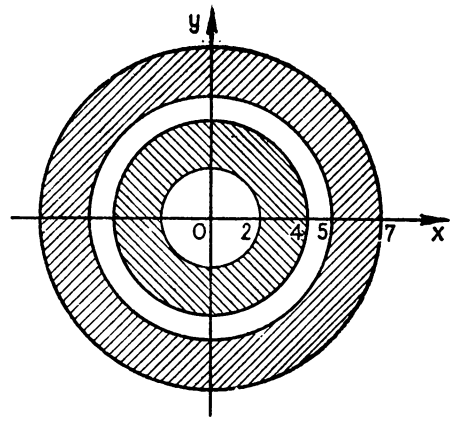


Рис. 11

Заметим, что если M_0 — точка границы множества E, то (определение 5) или в любой окрестности точки M_0 есть отличные от M_0 точки, принадлежащие E, и тогда M_0 — предельная для E точка, или есть такая окрестность этой точки, в которой нет ни одной другой точки из E, и тогда (M_0 — граничная точка) $M_0 \in E$. В последнем случае M_0 называется *изолированной точкой* множества E.

Относительно границы точечного множества нетрудно доказать следующие утверждения: 1) при присоединении к данному множеству его границы Γ образуется замкнутое множество; 2) если множество E замкнуто, то оно содержит всю границу Γ. Отсюда в свою очередь вытекает, что множество E тогда и только тогда замкнуто, когда оно содержит свою границу.

Определение 6. *Множество E точек пространства R^n называется связным, если для любых двух его точек A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ можно найти такую заданную на некотором сегменте $[t_1, t_2]$ простую кривую: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$, соединяющую точки A и B: $a_i = \varphi_i(t_i)$, $b_i = \varphi_i(t_2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что все ее точки, соответствующие значениям t из $[t_1, t_2]$, принадлежат этому множеству E.*

Так, множество E точек плоскости, описываемых соотношениями $4 < x^2 + y^2 < 9$ («кольцо»), является связным: две любые его точки можно соединить простой кривой (например, дугой некоторой окружности), все точки которой будут принадлежать этому множеству. Напротив, множество E, описываемое на плоскости уравнением

$$\{|x^2 + y^2 - 10| - 6 + [||x^2 + y^2 - 10| - 6|]\} \cdot \{|x^2 + y^2 - 37| - 12 + [||x^2 + y^2 - 37| - 12|]\} = 0$$

(два кольца, расположенные соответственно одно — между кругами $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 16$, взятыми вместе с их границами, другое — между кругами $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 = 49$, также взятыми вместе с их границами), не является связным: здесь даже никакие две точки, расположенные в различных «кольцах», невозможно соединить простой кривой, целиком принадлежащей множеству E (рис. 11).

Определение 7. *Открытой областью называется всякое открытое точечное множество; открытое множество, взятое вместе с его границей, называется замкнутой областью**).

Примерами открытых областей являются параллелепипедальная и сферическая окрестности (см. с. 131).

Открытую область часто называют просто областью.

§ 36. ПРИНЦИП СТЯГИВАЮЩИХСЯ (n-МЕРНЫХ) КУБОВ

Теорема (принцип стягивающихся кубов). *Какова бы ни была последовательность замкнутых кубов*

$$K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_m,\ \ldots, \tag{1}$$

из которых каждый, начиная со второго, «вложен» в предыдущий: $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_m \supset \ldots$, *и таких, что последовательность длин их ребер* $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_m, \ldots$ *стремится к нулю***), *существует одна и только одна точка пространства* R^n, *принадлежащая всем кубам* (1).

Для простоты в обозначениях докажем теорему, например, для случая $n = 2$ (т. е. для последовательности стягивающихся квадратов).

Квадрат K_m ($m = 1, 2, \ldots$) последовательности (1) определяется неравенствами:

$$|x_m - a_m| \leqslant \delta_m,\ |y_m - b_m| \leqslant \delta_m, \tag{2}$$

где $A_m\ (a_m, b_m)$ — центр квадрата, а (x_m, y_m) — произвольная точка его. Если рассмотреть отдельно неравенства: $|x_m - a_m| \leqslant \delta_m$ ($m = 1, 2, \ldots$), то легко заметить, что сами по себе они определяют последовательность сегментов оси Ox:

$$[a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1],\ [a_2 - \delta_2,\ a_2 + \delta_2],\ \ldots,\ [a_m - \delta_m, a_m + \delta_m],\ \ldots, \tag{3}$$

которая будет стягивающейся. В самом деле, поскольку каждая точка квадрата K_{m+1} принадлежит квадрату K_m, то, в частности, из неравенства $|x_{m+1} - a_{m+1}| \leqslant \delta_{m+1}$ должно следовать неравенство $|x_{m+1} - a_m| \leqslant \delta_m$: взяв вместе с $x_{m+1} \in [a_{m+1} - \delta_{m+1},\ a_{m+1} + \delta_{m+1}]$ еще какое-либо $y_{m+1} \in [b_{m+1} - \delta_{m+1},\ b_{m+1} + \delta_{m+1}]$, мы получим, что $(x_{m+1},\ y_{m+1}) \in K_{m+1} \subset K_m$, а потому, в частности, $|x_{m+1} - a_m| \leqslant \delta_m$, т. е. каждая точка сегмента $[a_{m+1} - \delta_{m+1},\ a_{m+1} + \delta_{m+1}]$ есть и точка сегмента $[a_m - \delta_m,\ a_m + \delta_m]$. Кроме того, длины этих сегментов стремятся по условию к нулю. Но тогда по принципу стягивающихся сегментов на прямой существует единственная точка ξ, принадлежащая всем сегментам (3):

$$a_m - \delta_m \leqslant \xi \leqslant a_m + \delta_m\ \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Совершенно так же доказывается, что и последовательность сегментов $[b_1 - \delta_1,\ b_1 + \delta_1],\ [b_2 - \delta_2,\ b_2 + \delta_2],\ \ldots,\ [b_m - \delta_m,$

---

*) Замкнутая область и в самом деле — замкнутое множество.

**) О такой последовательности (1) говорят, что она является последовательностью стягивающихся кубов.

$b_m + \delta_m]$, ... является стягивающейся и, значит, имеет единственную точку η, принадлежащую всем этим сегментам: $|\eta - b_m| \leqslant \delta_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. В таком случае точка $M_0(\xi, \eta)$ принадлежит всем квадратам (1) (см. (2)). При этом другой точки, принадлежащей всем этим квадратам, быть не может: если точка $M_1(\xi_1, \eta_1)$ принадлежит всем квадратам (1), то для нее, в частности, выполняются (по (2)) неравенства: $|\xi_1 - a_m| \leqslant \delta_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, и точка $x = \xi_1$ прямой Ox принадлежит всем сегментам (3). Но тогда $\xi_1 = \xi$. Совершенно так же мы докажем, что $\eta_1 = \eta$, и таким образом, точка M_1 совпадает с точкой M_0.

§ 37. СХОДЯЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТОЧЕК n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Понятие сходящейся последовательности чисел одномерного пространства может быть перенесено на последовательность систем $(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm})$ действительных чисел, т. е. на последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_m \ldots$ (коротко: $\{M_m\}$) пространства R^n и в случае $n > 1$.

Определение. *Последовательность* $\{M_m\}$, *где* $M_m(x_{1m}, x_{2m} \ldots, \ldots, x_{nm})$, *точек n-мерного пространства* R^n *называется сходящейся в этом пространстве к некоторой точке* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *если для любого положительного числа r можно указать такое натуральное число N, что при* $m > N$ *выполняется неравенство:* $M_mM < r$ (*так что* $M_mM \to 0$ *при* $m \to +\infty$). *При этом пишут:* $\lim\limits_{m \to +\infty} M_m = M$, *или* $M_m \to M$ *при* $m \to +\infty$.

Точка M здесь называется *пределом последовательности* $\{M_m\}$. Отметим, что в этом определении можно вместо сферической r-окрестности точки рассматривать кубическую δ-окрестность ее (с. 132, теорема).

Таким образом, сходимость последовательности $\{M_m\}$ точек n-мерного пространства R^n к точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает также, что для любого положительного числа δ можно указать такое натуральное число N, что при $m > N$ выполняются неравенства: $|x_{1m} - x_1| < \delta$, $|x_{2m} - x_2| < \delta$, ..., $|x_{nm} - x_n| < \delta$.

Но в таком случае каждая из последовательностей $\{x_{1m}\}$, $\{x_{2m}\}$, ..., $\{x_{nm}\}$ также является сходящейся в смысле определения, данного в т. I (§ 27), и мы приходим (поскольку обратное тоже верно) к такому определению сходящейся последовательности точек: *последовательность* $\{M_m\}$ *точек* $M_m(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm})$ *называется сходящейся к точке* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *если каждая из последовательностей координат* $\{x_{1m}\}, \{x_{2m}\}, \ldots, \{x_{nm}\}$ *сходится соответственно к* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (к первой, второй, ..., n-й координате точки M), *т. е.* $\lim\limits_{m \to +\infty} x_{km} = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 1. *Если данное бесконечное множество E точек из* R^n *имеет предельную точку* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *то из этого множества*

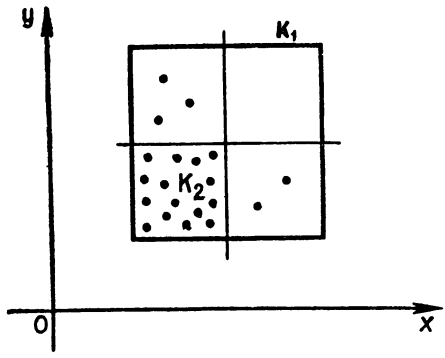


Рис. 12

можно выделить последовательность $\{M_m\}$*) точек* M_m*, отличных от* P*, сходящуюся к точке* P.

Доказательство. Пусть $\{r_m\}$ — какая-либо последовательность чисел, сходящихся к нулю: $\lim\limits_{m\to+\infty} r_m = 0$. Так как P— предельная точка для E, то при всяком m сферическая r_m-окрестность точки P содержит хотя бы одну принадлежащую E точку $M_m \neq P$. Выбирая по точке $M_m \in E$ в каждой из таких окрестностей, мы сможем составить бесконечную последовательность $\{M_m\}$ точек множества E, отличных от P. Если теперь задано число $r > 0$, то, поскольку $r_m \to 0$ при $m \to +\infty$, мы всегда можем подобрать номер m_0 так, чтобы при $m \geqslant m_0$ было: $r_m < r$. Тогда все точки из $\{M_m\}$ с номером $m \geqslant m_0$ попадут в r-окрестность точки P, так что

$$\lim_{m\to+\infty} M_m = P.$$

Возникает вопрос, всякое ли бесконечное множество E точек пространства R^n имеет предельную точку. Если данное множество будет неограниченным, то оно может и не иметь предельных точек, но имеет место следующая теорема.

Теорема 2. (Больцано—Вейерштрасса). *Всякое бесконечное ограниченное множество* E *пространства* R^n *имеет хотя бы одну предельную точку.*

Ради простоты в записях докажем эту теорему для случая $n = 2$.

Так как E — ограниченное двумерное множество, то его можно целиком поместить в некоторый квадрат K_1 плоскости, стороны которого параллельны координатным осям (с. 132); разделим его прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных квадрата (рис. 12).

Так как множество E бесконечно, то по крайней мере в одном из этих квадратов, K_2, содержится бесконечно много точек, принадлежащих этому множеству E (иначе, и во всем квадрате K_1 их было бы лишь конечное число и E не могло бы быть бесконечным).

Квадрат K_2, сторона которого равна $\frac{d}{2}$ (где d — сторона исходного квадрата), снова делим прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных квадрата. Среди них есть квадрат K_3, в котором содержится бесконечно много точек множества E, и т. д. На

*) И даже сколько угодно таких последовательностей.

m-ом шаге получим квадрат K_m, сторона которого равна $\frac{d}{2^{m-1}}$ и в котором имеется бесконечно много точек данного множества E.

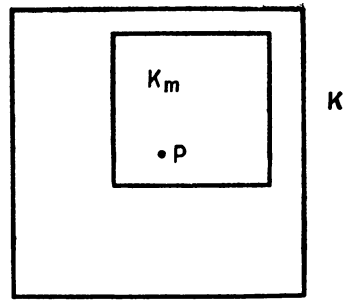


Рис. 13

Так как $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_m \supset \ldots$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{d}{2^{m-1}} = 0$, то мы имеем последовательность стягивающихся квадратов. Согласно теореме § 36 существует одна и только одна точка P, общая им всем. Легко видеть, что эта точка непременно будет предельной для множества E: какова бы ни была квадратная окрестность K со стороной 2δ точки P, всегда можно взять m столь большим, чтобы сторона очередного квадрата K_m указанной выше последовательности стала меньше половины стороны данного квадрата, т. е. меньше δ, и чтобы тем самым квадрат K_m целиком поместился внутри взятого квадрата (рис. 13). Так как в квадрате K_m (каким бы ни было натуральное m) содержится бесконечно много точек множества E, то их тем более будет бесконечно много и в произвольно взятой нами квадратной δ-окрестности точки P, а это и означает, что P — предельная точка множества E.

Следствие. *Из всякой бесконечной ограниченной последовательности точек* $\{M_m\}$*) *пространства* R^n *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Пусть E — множество различных точек данной последовательности $\{M_m\}$. Если E — конечное множество, то хотя бы одна точка $M_k \in E$ должна в этой последовательности повторяться бесконечно много раз, и подпоследовательность для $\{M_m\}$, состоящая из точек (различных номеров), совпадающих с M_k, уже окажется сходящейся (к M_k). Если же E — бесконечное множество, то оно, будучи ограниченным, должно по теореме 2 иметь предельную точку P, а тогда (теорема 1) из E можно выделить подпоследовательность $\{P_m\}$, сходящуюся к P, причем всегда можно добиться того, чтобы члены в $\{P_m\}$ были перенумерованы в порядке их появления в $\{M_m\}$: рассуждая, как и в теореме 1, мы можем брать из очередной r_{m+1}-окрестности точку P_{m+1} так, чтобы она имела в последовательности $\{M_m\}$ номер более высокий, чем уже выбранная точка $\{M_m\}$**), что всегда возможно, так как в этой окрестности содержится бесконечно много точек из $\{M_m\}$.

---

*) Последовательность точек $\{M_m\}$ называется ограниченной, если ограничено множество ее различных точек.

**) Судя по одному какому-либо ее номеру в $\{M_m\}$.

ГЛАВА VI.

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 38. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В настоящем параграфе мы обобщим и уточним известное уже читателю понятие функции нескольких переменных (т. I, § 24).

Определение. *Пусть D — некоторое непустое множество точек пространства R^n и пусть каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого множества D поставлено в соответствие по какому-либо закону некоторое действительное число u. Тогда говорят, что на множестве D задана функция от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (или, иначе, функция точки M n-мерного пространства), и пишут:* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *или* $u = f(M)$.

Множество D при этом называют *областью определения**) функции. Тем самым функция определяется как некоторое соответствие, по которому каждому элементу M заданного множества D сопоставляется единственное действительное число u**).

Функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $n > 1$ называют *функцией нескольких переменных*, а координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки $M \in D$ называют аргументами функции или независимыми переменными.

Если $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — фиксированная точка из D, то символом $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (или символом $f(A)$) обозначают число, соответствующее по указанному закону взятой точке, и называют это число значением функции в точке A. В этой связи принято также говорить о *множестве всех значений функции*.

Так как функция (соответствие) не может мыслиться без области определения (без множества, на котором это соответствие задано), то, как и для функции одного переменного, функция считается заданной, если: а) указана ее область определения D и б) задан на D закон соответствия, определяющий значения этой функции. Здесь также различают аналитическое, табличное и словесное задание функции.

Функцию $z = f(x, y)$ двух переменных можно истолковывать геометрически. Геометрическим образом (изображением) функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек (x, y, z) трехмерного пространства, для которых точка (x, y) двумерного пространства

---

*) Этот термин не имеет здесь (вообще говоря) отношения к термину «область» из § 35.

**) В общем случае единственный элемент какого-то множества E.

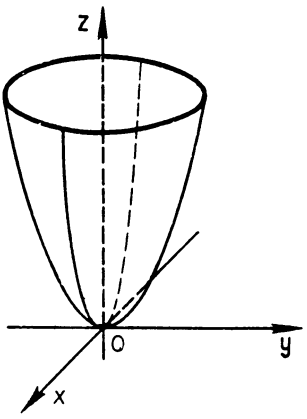


Рис. 14

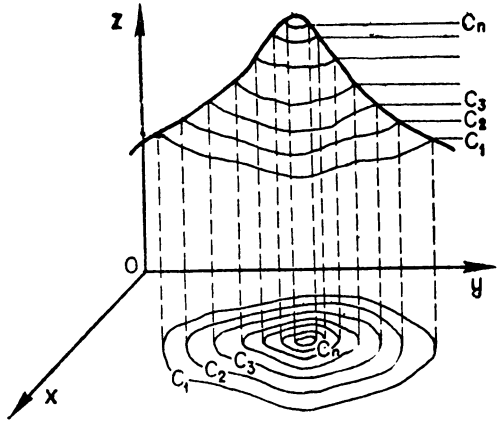


Рис. 15

принадлежит области определения D функции, а аппликата z есть значение функции в точке (x, y). Чаще всего при этом геометрическим образом функции будет некоторая поверхность (с уравнением $z = f(x, y)$). Так, геометрическим образом уравнения $z = x^2 + y^2$ будет поверхность эллиптического параболоида (рис. 14).

Нередко для получения представления о геометрическом изображении функции $z = f(x, y)$ прибегают к построению на пл. xOy *линий уровня*, каждая из которых есть множество всех точек (x, y) плоскости xOy, в которых рассматриваемая функция принимает заданное постоянное значение c: $f(x, y) = c$ (рис. 15).

Соответствующий метод изучения поверхности применяется в топографии.

При $n \geqslant 3$ функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непосредственного изображения не имеет (хотя при $n = 3$ и могут еще быть построены так называемые поверхности уровня).

При аналитическом задании функции (т. е. с помощью формулы) область определения ее часто не указывают непосредственно, понимая под ней, как и для функций одного переменного, область существования функции — множество всех тех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых аналитическое выражение, определяющее закон ее соответствия, имеет смысл на множестве действительных чисел.

Пример 1. Область существования функции

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \frac{1}{\sqrt{2x - y}} + \ln(y - x)$$

определяется системой неравенств: $x^2 + y^2 \leqslant 9$, $y < 2x$, $y > x$ (рис. 16).

Пример 2. Найти область существования функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt[4]{1 - (x^2 + y^2)^4}.$$

Судя по радикалам, должно быть: $x^2 + y^2 \geqslant 1$ и вместе с тем $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Таким образом, остаются только точки (x, y), для которых $x^2 + y^2 = 1$ —

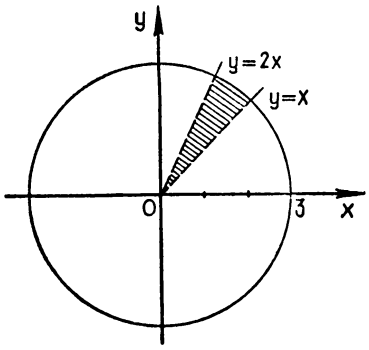


Рис. 16

область существования функции есть линия — единичная окружность с центром в точке 0, а единственное значение функции есть $z = 0$.

Пример 3. Для функции $u = \ln(r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)$ $(r > 0)$ область существования задается неравенством: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < r^2$, т. е. неравенством $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < r$, и есть сферическая r-окрестность точки O.

Многие понятия функции одного переменного переносятся без существенных изменений и на случай функций нескольких переменных. Так, можно говорить об ограниченных (неограниченных) функциях. Аналогично тому, как это было сделано для функций одного переменного (т. I, § 17), здесь также вводят понятие равенства двух функций, понятия суммы, произведения, разности и частного функций, понятие сложной функции и т. д. Введем, например, понятие сложной функции нескольких переменных.

Пусть на некоторой области определения D задано m функций от n переменных:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \ldots;$$
$$u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

а на некоторой области определения D_1 задана функция

$$w = f(u_1, u_2, \ldots, u_m) \qquad (2)$$

аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_m$, причем для любой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ совокупность значений $u_1, u_2, \ldots, u_m$ функций из (1) принадлежит области определения D_1 функции (2): $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in D_1$. Тогда каждой точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \in D$ можно поставить в соответствие число $\bar{w} = f(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, где $\bar{u}_i = \varphi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, и тем самым построить на области определения D некоторую новую функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эту функцию называют *сложной функцией* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или функцией от функций и обозначают символом:

$$w = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f[\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]. \qquad (3)$$

О сложной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ также говорят, что ее получают подстановкой в функцию $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ значений переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$ из (1) (см. (3)).

Так, функция $w = \cos\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} + 3\ln(2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2)\right]$, или, в других обозначениях, $w = \cos\left[\sqrt{x^2 + y^2 - z^2} + 3\ln(2x^2 + 2y^2 - 2z^2)\right]$ в области определения D, заданной неравенством

$z^2 < x^2 + y^2$, есть сложная функция $w = \cos(u_1 + 3u_2)$, где $u_1 = \varphi_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$; $u_2 = \varphi_2(x, y, z) = \ln(2x^2 + 2y^2 - 2z^2)$.

Замечание. В частном случае, когда функции (1) зависят всего лишь от одного аргумента t: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., ..., $x_n = \varphi_n(t)$ (здесь вместо u_i записаны x_i), функция $w = f(x_1, x_2, ..., ..., x_n)$ будет (при условии, что точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежат ее области определения) сложной функцией от t: $w = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)]$.

§ 39. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Определение 1. *Пусть $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ — некоторая предельная точка области определения D данной функции от n переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда число l называется пределом этой функции в точке A, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такую окрестность точки A, что для всех точек $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ этой окрестности ($X \neq A$), принадлежащих области определения функции*[*], *выполняется условие*

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n) - l| < \varepsilon, \text{ т. е. } |f(X) - l| < \varepsilon.$$

То, что функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет в точке $A(a_1, a_2, ..., ..., a_n)$ предел l, записывается так:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = l, \quad \text{или} \quad \lim_{X \to A} f(X) = l. \tag{1}$$

Упоминаемая в определении окрестность точки A может быть при этом (на основании теоремы § 34) с одинаковым правом взята как сферической, так и кубической. В последнем случае (на языке $\varepsilon - \delta$) определение предела функции можно сформулировать так: число l есть предел функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, если по любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, принадлежащих D ($X \neq A$) и удовлетворяющих условиям: $|x_i - a_i| < \delta$ ($i = 1, 2, ..., n$), выполняется неравенство: $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - l| < \varepsilon$.

Пример 1. Показать, что функция $f(x, y) = 2xy - 3x + 4y + 6$ имеет в точке $A(1, 2)$ предел $l = 15$.

Решение. Функция $f(x, y)$ задана для всех x и y и точка A (как и вообще любая точка) является предельной для ее области определения. Для разности $f(x, y) - l$ имеем: $|f(x, y) - l| = |2xy - 3x + 4y + 6 - 15| = |2xy - 3x + 4y - 9| = |2(x - 1)(y - 2) + (x - 1) + 6(y - 2)| \leqslant 2|x - 1| \cdot |y - 2| + |x - 1| + 6|y - 2|$.

Пусть теперь задано число $\varepsilon > 0$. Будем считать, что $\varepsilon < 1$, и выберем число $\delta = \frac{\varepsilon}{9} < 1$. Тогда, как только будет $|x - 1| < \delta$, $|y - 1| < \delta$ (здесь, может быть, и $(x, y) \equiv (1, 2)$), так окажется: $2|x - 1| \cdot |y - 2| + |x - 1| +$

[*] В этой окрестности заведомо найдутся точки, принадлежащие области определения D, так как точка A — предельная для D.

$+ 6|y-2| < 2\delta^2 + 7\delta < 9\delta = \varepsilon$ $\left(\delta < 1;\ \delta = \frac{\varepsilon}{9}\right)$, а значит, и $|f(x, y) - 15| < \varepsilon$.

Мы брали $\varepsilon < 1$. Но если задано $\varepsilon \geqslant 1$, то, взяв какое-либо положительное число $\varepsilon' < 1$, мы по доказанному сумеем подобрать $\delta > 0$ так, чтобы неравенства $|x-1| < \delta$; $|y-2| < \delta$ влекли за собой неравенство $|f(x,y) - 15| < \varepsilon'$, а тогда и подавно $|f(x, y) - 15| < \varepsilon$. Отсюда, по определению предела $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (2xy - 3x + 4y + 6) = 15$.

Пример 2. Показать, что функция $\varphi(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при $x \to 0$ и $y \to 0$ имеет предел, равный нулю.

Р е ш е н и е. Точка (0, 0) — предельная для области существования функции $\varphi(x, y)$. Исходя из очевидного неравенства $|x|^2 + |y|^2 \geqslant 2|x| \cdot |y|$, т. е. (при $x^2 + y^2 \neq 0$) $\left|\dfrac{2|x| \cdot |y|}{x^2+y^2}\right| \leqslant 1$, мы можем записать:

$$|\varphi(x, y) - 0| = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Поэтому, взяв по заданному $\varepsilon > 0$ число $r = 2\varepsilon$, получим, что при $0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < r$ окажется: $|\varphi(x, y) - 0| \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{r}{2} = \varepsilon$, откуда следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varphi(x, y) = 0$.

Как и для функций одного переменного, здесь можно дать определение предела функции и по Гейне (на языке последовательностей).

Определение 2. *Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — предельная точка для области определения D функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных. Число l называют пределом этой функции в точке A, если для любой последовательности точек $M_1, M_2, \ldots, M_m, \ldots$, взятых из области определения функции, отличных от точки A и сходящихся к A, соответствующая последовательность значений функции: $f(M_1)$, $f(M_2)$, $\ldots$, $f(M_m)$, $\ldots$ сходится к числу l.*

Как и в случае $n = 1$, доказывается эквивалентность определений 1 и 2.

Пример 3. Показать, что функция $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ в точке (0, 0) не имеет предела.

Р е ш е н и е. Беря две сходящиеся к точке (0, 0) последовательности точек $M_m\left(\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}\right)$ и $M'_m\left(\dfrac{2}{m}, \dfrac{1}{m}\right)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, мы получим, что для всех m $f(M_m) = 0$, а потому и $\lim\limits_{m\to+\infty} f(M_m) = 0$, в то время как $f(M'_m) = \dfrac{\frac{1}{m}}{\frac{3}{m}} = \dfrac{1}{3}$, так что $\lim\limits_{m\to+\infty} f(M'_m) = \dfrac{1}{3}$. Так как последовательности $\{f(M_m\}$ и $\{f(M'_m\}$ сходятся к различным пределам, то на основании определения 2 заключаем, что функция $f(x, y)$ не имеет предела в точке (0, 0).

Данное выше определение предела легко распространить также на случай бесконечно-больших предельных значений функции. Читатель сам легко сформулирует соответствующие определения по аналогии с тем, как это делалось для функции одного переменного. Точно так же можно дать определение пределов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на бесконечности. Так, для случая функции двух переменных это пределы вида:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y), \quad \lim_{\substack{x\to+\infty(-\infty)\\ y\to+\infty(-\infty)}} f(x,y), \quad \lim_{\substack{x\to+\infty(-\infty)\\ y\to-\infty(+\infty)}} f(x,y), \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to\infty(+\infty,-\infty)}} f(x,y).$$

Здесь, например, первая запись означает, что если в области определения функции есть точки с как угодно большими по абсолютной величине координатами, то число l (или бесконечность) считается пределом функции при $x\to\infty$, $y\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ ($K > 0$) можно указать такое положительное число M, что для всех точек (x, y), взятых из области определения функции и удовлетворяющих условиям $|x| > M$, $|y| > M$, выполняется неравенство: $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ (соответственно неравенство: $|f(x, y)| > K$).

Например, исходя из первого основного предела (т. I, § 40), читатель сразу же обнаружит, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 1$.

Для предела же, например, вида $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to+\infty}} f(x, y)$ соответствующие неравенства по x и y писались бы: $0 < |x - x_0| < \delta$; $y > M$, причем в определении указывалось бы, что в D есть точки с как угодно большой ординатой и точки с как угодно близкой к x_0 абсциссой.

На пределы функций от нескольких переменных распространяются основные теоремы о пределах, доказанные для функций от одного переменного, например, об ограниченности функции, имеющей предел, о бесконечно малых в данной точке функциях, о пределе суммы, разности, произведения и частного функций, степени и корня, причем доказательства этих теорем могут быть даны совершенно такие же, как и в случае $n = 1$ (т. I, § 44). Остаются также в силе и теоремы о пределах, связанные с неравенствами (ср. т. I, § 29 и § 44).

Верной остается (при соответствующей перефразировке) и теорема о пределе сложной функции.

Если функции $u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., ..., $u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют в точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ пределы, соответственно равные $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$, а функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ имеет в точке $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ (предельной для ее области определения) предел l ($l = \lim\limits_{\substack{u_1\to\bar{u}_1\\ \cdots\\ u_m\to\bar{u}_m}} f(u_1, u_2, \ldots u_m)$)*), то сложная функ-

*) Причем хотя бы для одного i ($1 \leqslant i \leqslant n$) существует такая окрестность точки $\bar{X}$ $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, в которой $\varphi_i(X) \neq u_i$ для $X \neq \bar{X}$.

ция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f[\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ (если она существует в некоторой окрестности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) имеет в точке $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$ предел, и он также равен l.

Остановимся на доказательстве лишь одной из таких теорем, предоставляя читателю самому провести доказательства остальных.

Теорема. *Если функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$ *имеет в точке* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *предел* $l \neq 0$, *то во всех точках* X *некоторой окрестности точки* A, *принадлежащих области определения* D *функции* ($X \neq A$), *эта функция сохраняет один и тот же знак — знак предела* l.

Доказательство. Так как $l = \lim\limits_{X \to A} f(X)$, то при любом $\varepsilon > 0$, например при $\varepsilon = |l| > 0$, существует такая окрестность точки A, что для точек $X \in D$ ($X \neq A$) будет $|f(X) - l| < \varepsilon = |l|$, или $l - |l| < f(X) < l + |l|$, так что при $l < 0$ имеем $f(X) < l + |l| = 0$, а при $l > 0$ $f(X) > l - |l| = 0$.

§ 40. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введем понятие непрерывности функций нескольких переменных.

Определение 1. *Функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *с областью определения* D *называется непрерывной в данной предельной точке* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ *по множеству* $E \subset D$, *если имеет место соотношение*:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E), \tag{1}$$

или, коротко,

$$\lim_{\substack{X \to A \\ (X \in E)}} f(X) = f(A).$$

По дополнительному определению будем принимать еще, что *функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *считается непрерывной по множеству* E *и в каждой изолированной точке этого множества* (если таковые имеются).

В переводе на язык $\varepsilon - \delta$ (r) определение 1 (вместе с дополнением) означает следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$ всегда можно подобрать такое число $\delta > 0$ ($r > 0$), что для всех точек $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, взятых из множества E и удовлетворяющих условиям $|x_i - a_i| < \delta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) (или соответственно условию $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < r$), выполняется неравенство:

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если функция не непрерывна в данной точке по множеству E, то говорят, что она имеет в этой точке разрыв; саму же точку называют точкой разрыва функции (относительно E).

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в каждой точке множества E, то говорят, что она непрерывна на этом множестве E.

Так, многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} A_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} \ldots x_n^{\lambda_i}$ есть функция непрерывная в каждой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а рациональная функция $\frac{P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ — в каждой точке, где $P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$.

Пример 1. Функция, заданная равенствами

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{для } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{для } x=0 \text{ и } y=0, \end{cases}$$

непрерывна в каждой точке множества $E = R^2$: для точки $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ мы имеем по теоремам о пределах функции

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to y_0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} (xy)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = f(x_0, y_0),$$

а для точки (0, 0) имеем: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y) = 0$ (с. 144) и в то же время $f(0, 0) = 0$ — равенство (1) снова выполняется.

Пример 2. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{для } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{для } x=0 \text{ и } y=0 \end{cases}$$

имеет в точке (0; 0) разрыв, ибо она в этой точке не имеет предела: при $y = 0$ $f(x, y) = 0$, при $x = y$ $f(x, y) = \frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ (см. определение 2).

Применяя теоремы о пределах, легко убедиться, что в остальных точках функция $f(x, y)$ непрерывна.

Пример 3. Функция $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$ не определена в предельных для ее области определения точках прямой $y = x$ и имеет каждую из этих точек своей точкой разрыва. Здесь точки разрыва образуют целую линию разрыва.

Относительно непрерывных функций нескольких переменных имеет место ряд теорем, аналогичных соответствующим теоремам для функций одного переменного. Так, справедливы теоремы о непрерывности суммы, произведения нескольких функций от n переменных, непрерывных в данной точке A (на данном множестве E). Здесь также имеет место теорема о знакопостоянстве (в соответствующей окрестности) непрерывной функции.

Теорема 1. *Если функция $u = f(X)$ непрерывна в данной точке A относительно множества E, причем ее значение u_0 в этой точке*

отлично от нуля, то во всех точках $X \in E$ *некоторой окрестности точки* A *функция сохраняет один и тот же знак — знак числа* u_0.

Для неизолированной точки доказательство следует из теоремы (см. с. 146): $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A) = u_0 \neq 0$. Для изолированной точки теорема верна тривиальным образом.

Справедлива и теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *определена на множестве* D *и непрерывна в точке* $\overline{U}(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n})$ *по этому множеству, а функции* $u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *определены на множестве* D_1 *и таковы, что для каждой точки этого множества точка* $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv [\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in D$. *Тогда, если функции* $\varphi_i(X) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *непрерывны в точке* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D_1$ *по множеству* D_1, *причем* $\varphi_i(A) = \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \overline{u_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *то сложная функция* $F(X) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f[\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ *непрерывна в точке* A *по множеству* D_1*).

Доказательство. По условию теоремы $\lim\limits_{X \to A} \varphi_i(X) = \varphi_i(A) = \overline{u_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $\lim\limits_{\substack{u_1 \to \overline{u_1} \\ \cdots\cdots \\ u_m \to \overline{u_m}}} f(u_1, u_2, \ldots, u_m) = f(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m})$.

$(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in D$

Отсюда по теореме о пределе сложной функции (с. 145)

$$\lim_{X \to A;\, X \in D} F(X) = \lim_{X \to A;\, X \in D} f[\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)] = \lim_{\substack{u_1 \to \overline{u_1} \\ \cdots\cdots \\ u_m \to \overline{u_m}}} f(u_1, u_2, \ldots, u_m) =$$

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in D$$

$$= f(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots \overline{u_n}) = f[\varphi_1(A), \varphi_2(A), \ldots, \varphi_m(A)] = F(A).$$

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{для } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \text{ и } y = 0. \end{cases}$$

Решение. Проведем исследование сначала для точек $(x, y) \neq (0, 0)$. Для таких точек $z = f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию $z = u \sin v$, где $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Функция $u = x^2 + y^2$ непрерывна в каждой точке. Непрерывна (для $x^2 + y^2 \neq 0$) и функция v (как частное непрерывных функций). Но и функция $z = u \sin v$ непрерывна в каждой точке (u, v) и, значит, по теореме 2 функция $z = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, а с ней и функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке $(x, y) \neq (0, 0)$.

---

*) Точки $\overline{U}$ и A здесь предполагаются предельными для соответствующих областей, но теорема остается верной и для изолированных точек.

Легко видеть, что $f(x, y)$ непрерывна и в точке (0, 0): так как при $\varepsilon = \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon}$ (где $\varepsilon > 0$ наперед задано) имеем:

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant x^2+y^2 < \varepsilon, \text{ то } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Но и $f(0, 0) = 0$, так что, действительно, $f(x, y)$ непрерывна и в точке (0, 0).

Дадим еще одно определение, относящееся к непрерывности функции нескольких переменных.

Определение 2. *Говорят, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно множества D непрерывна в предельной точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по аргументу x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, например, по аргументу x_1, если*

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)\in D}} f(x_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Ясно, что всякая непрерывная в данной точке по совокупности аргументов функция будет (см. определение, с. 146) непрерывной и по каждому из аргументов в отдельности. Обратное же, вообще говоря, неверно. Так, функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3y^2}{x-y} + 2\cos x\cos y & \text{для } x \neq y, \\ 2 & \text{для } x = y \end{cases}$$

непрерывна в точке (0, 0) по каждому из аргументов в отдельности: для $x \neq 0$, $f(x, 0) = \dfrac{x^2}{x} + 2\cos x = x + 2\cos x$, а для $x = 0$, $f(x, 0) = f(0, 0) = 2$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{x\to 0}(x + 2\cos x) = 2 = f(0,0)$. Аналогично $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0}(-3y + 2\cos y) = 2 = f(0,0)$.

Между тем эта функция не является в точке (0, 0) непрерывной по совокупности аргументов x, y, так как даже не имеет предела в этой точке.

Замечание. Рассматривая функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с областью определения D в точках линии: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ (с. 143), где t принадлежит некоторому сегменту $[\alpha, \beta]$ (интервалу $(-\infty, +\infty)$), мы получим сложную функцию

$$F(t) = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)].$$

Если функции $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ (на $(-\infty, +\infty)$), а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна на D, то по теореме о непрерывности сложной функции $F(t)$ будет также непрерывной на $[\alpha, \beta]$ (на $(-\infty, +\infty)$).

Рассмотрим теперь вопрос о приращениях функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть дана точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из области определения D данной функции; выберем в D еще одну точку $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

Разность соответствующих координат этих точек $\Delta x_i = x_i' - x_i$ назовем приращением аргумента x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) в точке M, а разность $\Delta u = f(x_1', x_2', \ldots, x_n') - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — приращением функции в точке M.

Полагая $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \ldots = \Delta x_n = 0$, т. е., заставляя меняться только одну i-ю координату точки M, получим частный случай приращения Δu, это приращение называют частным приращением $\Delta_{x_i} u$ функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M по аргументу x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

В отличие от частных приращений $\Delta_{x_i} u$ приращение Δu функции (обозначаемое еще через Δf) называется ее *полным приращением в точке M* (термин «полное приращение» указывает на то, что при его подсчете принимается во внимание изменение (приращение) всех аргументов функции).

Как и в случае функций одного переменного, определение непрерывности функций нескольких переменных в данной точке можно дать, исходя из понятия приращения функции.

Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с областью определения D называется непрерывной по множеству E ($E \subset D$) в данной точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенств

$$|\Delta x_1| < \delta;\ |\Delta x_2| < \delta,\ \ldots,\ |\Delta x_n| < \delta$$
$$((a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) \in E)$$

следует неравенство $|\Delta u| < \varepsilon$, т. е. бесконечно малым приращениям аргументов функции соответствует и бесконечно малое приращение самой функции: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$.

§ 41. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ

Функция нескольких переменных, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве, обладает рядом важных свойств.

Теорема 1. *Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве E, ограничена на этом множестве.*

Доказательство. Метод доказательства может быть дан в основных чертах тот же, что и для случая $n = 1$. Ради простоты в записи мы рассмотрим здесь только случай $n = 2$, но рассуждения при этом без каких бы то ни было изменений смогут быть перенесены на случай любого n.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что данная функция двух переменных $f(x, y)$ не ограничена на E.

По условию E — ограниченное множество, значит, существует квадрат K_1 (стороны которого параллельны координатным осям), целиком содержащий множество E. Разобьем этот квадрат на 4 равных квадрата. Хотя бы один из этих квадратов содержит часть множества E, на которой $f(x, y)$ не ограничена (иначе $f(x, y)$ будет ограничена на всем множестве E). Выберем один из таких квадратов и обозначим его через K_2. Квадрат K_2 снова разделим на 4 равных квадрата, из которых хотя бы один, K_3, обладает тем же свойством, что и K_2: $f(x, y)$ на части $E \subset K_3$ не ограничена и т. д.

Получив таким образом последовательность $\{K_m\}$ стягивающихся квадратов, мы найдем точку $M_0(x_0, y_0)$, общую им всем (§ 36).

Поскольку в каждом из квадратов K_m функция $f(x, y)$ не ограничена, то в каждом из них есть бесконечно много точек, принадлежащих множеству E (на конечном множестве точек функция непременно ограничена), следовательно, их будет бесконечно много и в произвольно выбранной квадратной окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$: так как стороны квадратов K_m при неограниченном возрастании m становятся как угодно малыми и $M_0 \in K_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то при достаточно большом номере m, квадрат K_m будет целиком помещаться в этой окрестности*). Таким образом, M_0 — предельная точка множества E, и поскольку E — замкнутое множество, то $M_0 \in E$.

С другой стороны, поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна на E, то она непрерывна и в точке M_0, а тогда существует такая δ — окрестность точки M_0 (например, квадратная), в которой функция $f(x, y)$ ограничена. Однако с некоторого номера m квадрат K_m целиком помещается в указанной δ-окрестности. Получается противоречие: в квадрате K_m функция $f(x, y)$ неограничена, а в найденной δ-окрестности, содержащей K_m, она ограничена. Выявленное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. (Вейерштрасса). *Функция от n переменных, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве E, имеет на E как наибольшее, так и наименьшее значения.*

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для случая $n = 1$ (т. I, § 51), и мы его проводить не будем.

Для функций нескольких аргументов также вводится понятие равномерной непрерывности.

Определение. *Функция $f(M)$, определенная на некотором n-мерном множестве E, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $r > 0$ $(\delta > 0)$, зависящее только от ε, что неравенство $M'M'' < r$, $M', M'' \in E$ (неравенства $|x_i' - x_i''| < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$) влечет*

---

*) Достаточно для этого взять номер m так, чтобы половина стороны квадрата K_m была меньше расстояния точки M_0 от стороны взятой квадратной окрестности.

(*влекут*) *за собой неравенство* $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$, *каковы бы ни были при этом точки* $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ *множества* E.

Теорема 3 (о равномерной непрерывности). *Функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве* E, *равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Положим, от противного, что существует такое число $\varepsilon > 0$, для которого (ведем доказательство в варианте с δ) нельзя подобрать число $\delta > 0$ указанным выше образом. Это означает, что при взятом $\varepsilon > 0$ для любого $\delta > 0$ найдутся такие две точки $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ из E, что будут верны неравенства $|x_i' - x_i''| < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, но тем не менее $|f(M') - f(M'')| \geqslant \varepsilon$. Тогда, взяв какую-либо сходящуюся к нулю числовую последовательность $\{\delta_m\}$, мы можем по ней построить такие две бесконечные последовательности точек $\{M_m'(x_{1m}', x_{2m}', \ldots, x_{nm}')\}$ и $\{M_m''(x_{1m}'', x_{2m}'', \ldots, x_{nm}'')\}$ из E, что будут верны неравенства $|x_{im}' - x_{im}''| < \delta_m$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, но тем не менее будет:

$$|f(M_m') - f(M_m'')| \geqslant \varepsilon \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Так как множество E ограничено, то ограничена и последовательность точек $\{M_m'\}$, а потому (следствие, с. 139) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{M_{m_k}'\}$ точек множества E. Положим, что эта последовательность сходится к точке $M_0(x_0, y_0)$. Легко видеть, что $M_0 \in E$. В самом деле, если бы точка M_0 не принадлежала E, то оказалось бы, в частности, что ни одна из точек M_m' не совпадает с M_0 и точка M_0 была бы в силу соотношения $\lim\limits_{m_k \to +\infty} M_{m_k}' = M_0$ предельной для E и в то же время не принадлежала бы E, а это противоречит замкнутости множества E.

Поскольку, далее, $|x_{m_k}' - x_{m_k}''| < \delta_{m_k}$, $|y_{m_k}' - y_{m_k}''| < \delta$, причем $\lim\limits_{m_k \to +\infty} \delta_{m_k} = 0$, то и последовательность $\{M_{m_k}''\}$ будет сходиться к точке $M_0(x_0, y_0)$. Но в силу непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $M_0 \in E$ $\lim\limits_{m_k \to +\infty} f(M_{m_k}') = f(M_0)$, $\lim\limits_{m \to +\infty} f(M_{m_k}'') = f(M_0)$, так что мы должны иметь:

$$\lim_{m_k \to +\infty} [f(M_{m_k}') - f(M_{m_k}'')] = 0. \tag{2}$$

С другой стороны, по (1) должно быть $|f(M_{m_k}') - f(M_{m_k}'')| \geqslant \varepsilon$ (для всех (натуральных) m_k), что противоречит равенству (2). Полученное противоречие и доказывает теорему.

При несколько иных, чем выше, ограничениях на множество E здесь также (ср. т. I, § 75) справедлива теорема о промежуточном значении.

Теорема 4. *Если функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *непрерывная на данной связной области (или замкнутой связной области)* D, *принимает в этой области два каких-либо различных значения* A *и* B $(A < B)$, *то она принимает в этой области, хоть однажды, и всякое промежуточное между* A *и* B *значение* C.

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значения A и B соответственно в точках $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ $(M' \neq M'')$. Так как область D связная, то мы можем точки M' и M'' соединить некоторой непрерывной на сегменте $[t', t'']$ кривой:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(t), \tag{3}$$

лежащей в области D, причем $x_i' = \varphi_i(t')$, а $x_i'' = \varphi_i(t'')$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Сложная функция $F(t) = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$ одного переменного t будет непрерывна на $[t', t'']$ (см. замечание на с. 149), причем $F(t') = f(M') = A$, $F(t'') = f(M'') = B$, и потому на $[t', t'']$ по аналогичной теореме для функций одного переменного (т. I, § 51, теорема 4) существует хотя бы одно такое значение $t = \bar{t}$, что $F(\bar{t}) = C$. Так как кривая (3) на $[t', t'']$ целиком лежит в области D, то, в частности, и точка $\bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_i = \varphi_i(\bar{t})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, принадлежит D. Но по самому определению сложной функции $F(t)$ имеем: $f(\bar{M}) = F(\bar{t}) = C$. Теорема доказана.

ГЛАВА VII.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С целью создания аппарата исследования функций нескольких переменных распространим основные понятия дифференциального исчисления функции одной переменной — понятие производной и дифференциала — на функции нескольких переменных.

§ 42. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть дана функция $u = f(x, y)$, определенная в некоторой области D. Возьмем какую-либо точку $M(x_0, y_0)$ этой области и дадим x_0 приращение $\Delta x \neq 0$, оставляя значение y_0 аргумента y неизменным, т. е. перейдем от точки $M(x_0, y_0)$ к точке $M'(x_0 + \Delta x, y_0)$ (при этом Δx таково, что точка M' принадлежит области D). Тогда и сама функция $f(x, y)$ получит некоторое частное приращение (§ 40):

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Это отношение для данной точки $M(x_0, y_0)$ является некоторой функцией аргумента Δx. Может случиться, что эта функция имеет предел при $\Delta x \to 0$, т. е. что существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Тогда этот предел называют *частной производной от функции* $u = f(x, y)$ *по аргументу* (независимой переменной) x в точке (x_0, y_0) и обозначают одним из следующих символов: u'_x, или f'_x, или $f'_x(x_0, y_0)$.

Наряду с этими обозначениями пользуются и такими: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ (последнюю запись изображают и так: $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$).

В первых трех обозначениях индекс x указывает на то, что производная вычисляется по переменной x. В четырех последних обозначениях употребляется буква ∂ («круглая») — вместо буквы d

(«прямой»), употребляемой при обозначении обыкновенной производной, чтобы указать на то, что здесь производится вычисление производной функции нескольких переменных, от которой может браться производная по каждому аргументу в отдельности. При этом следует заметить, что символы $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ разделять на ∂u и ∂x (соответственно на ∂f и ∂x), т. е. рассматривать эти символы как дроби, нельзя. Символы ∂u и ∂x, ∂f и ∂x в отдельности ничего не обозначают. Забвение этого может привести к ошибкам (см. ниже пример 4).

С помощью введенных обозначений определение частных производных запишется так:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогичным образом определяется частная производная данной функции по аргументу y в точке (x_0, y_0). Именно, предел отношения

$$\frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

при $\Delta y \to 0$, если он существует, называется *частной производной от функции* $u = f(x, y)$ *по аргументу* (независимой переменной) y в точке (x_0, y_0) и обозначается символами, аналогичными предыдущим:

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $f(x, y)$ в данной точке $M(x_0, y_0)$ — первая в направлении прямой $y = y_0$ (или, как говорят, относительно переменной x), вторая — в направлении прямой $x = x_0$ (относительно переменной y).

Определение частных производных функций трех и большего числа независимых переменных вводится так же, как и для функций двух переменных.

Определение. *Частной производной от* функции* $u = f(x, y, z, \ldots, w)$ *по какой-либо из независимых переменных в точке* $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ *называется предел отношения соответствующего частного приращения данной функции в этой точке к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего приращения к нулю.*

Обозначения частных производных функции $u = f(x, y, z, \ldots, w)$ аналогичны приведенным выше. Например,

---

* В фразах подобного рода предлог *от* часто опускается.

$$f'_z(x_0, y_0, z_0, \ldots w_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z, \ldots, w_0) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)}{\Delta z}$$

-частная производная данной функции в точке $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ по аргументу z.

Как и в случае функции двух независимых переменных, частные производные $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots, f'_w$ характеризуют скорости изменения функции $u = f(x, y, z, \ldots, w)$ в данной точке $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ соответственно относительных переменных $x, y, z, \ldots, w$.

Очевидно, каждой точке $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0) \in D$, в которой частные производные $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots, f'_w$ существуют, можно поставить в соответствие числа $f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0), f'_y(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0), \ldots, f'_w(x_0, y_0, \ldots, w_0)$ и, значит, на всей заданной области D или на какой-либо ее части D_1 построятся некоторые функции $f'_x(x, y, z, \ldots, w), f'_y(x, y, z, \ldots, w), \ldots, f'_w(x, y, z, \ldots, w)$, которые называются частными производными от функции $f(x, y, z, \ldots, w)$ при переменных $x, y, z, \ldots, w$.

Так как при определении какой-либо частной производной все аргументы, кроме выбранного, считаются постоянными, то соответствующая частная производная может быть найдена как обычная производная функции одной переменной, т. е. функции, которая получится из данной, если в ней все аргументы, кроме выбранного, считать постоянными.

Пример 1. Найти частные производные функции $u = f(x, y, z) = (z - xy^2)^4$ в произвольной точке (x, y, z).

Решение. Рассматривая y и z как постоянные, а x как переменное и пользуясь правилами дифференцирования функции одной переменной, найдем: $\frac{\partial u}{\partial x} = -4(z - xy^2)^3 y^2$ — частную производную данной функции по x в любой точке (x, y, z).

Аналогично получим: $\frac{\partial u}{\partial y} = 4(z - xy^2)^3 (-2xy) = -8xy(z - xy^2)^3$ — частную производную данной функции по y в любой точке (x,y,z).

Наконец, найдем: $\frac{\partial u}{\partial z} = 4(z - xy^2)^3$ — частную производную функции u по z в точке (x,y,z).

Пример 2. Дана функция $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \sin(xy)$. Вычислить значения частных производных этой функции в точке (0, 1).

Решение. Частные производные данной функции в любой точке (x, y) $(y \neq 0)$ будут:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \sin(xy) + ye^{\frac{x}{y}} \cos(xy), \quad f'_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \sin(xy) +$$
$$+ xe^{\frac{x}{y}} \cos(xy).$$

Отсюда при $x = 0$ и $y = 1$ получаем: $f'_x(0, 1) = 1$, $f'_y(0, 1) = 0$.

Пример 3. $u = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. Доказать, что $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(x > y \geqslant 0)$.

Решение. Находим: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$.

Умножая обе части первого равенства на x, а второго на y и складывая почленно полученные равенства, найдем:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} - \frac{y}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Зависимость между переменными x, y и z устанавливается соотношением $xyz = 1$. Доказать, что $\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$.

Решение. Каждую из переменных x, y и z можно рассматривать как функцию двух других (в соответствующей области). Именно: $z = \dfrac{1}{xy}$, $y = \dfrac{1}{xz}$, $x = \dfrac{1}{yz}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0)$, откуда $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{xy^2}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{1}{zx^2}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = -\dfrac{1}{yz^2}$.

Перемножая найденные частные производные и учитывая, что $xyz = 1$, получим требуемое:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{1}{(xyz)^3} = -1.$$

Здесь небезынтересно заметить, что если бы символы $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ рассматривались как дроби, то для произведения $\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z}$ мы получили бы (после сокращения) значение $+1$, а не -1.

Замечание. Для функции одной переменной из существования производной функции в данной точке следовала ее непрерывность в этой точке. Для функции же нескольких переменных из существования у функции всех частных производных в данной точке, вообще говоря, еще не следует непрерывность функции в этой точке (другими словами, для существования в данной точке частных производных функции нескольких переменных не требуется непрерывность этой функции в рассматриваемой точке). Рассмотрим пример. Пусть функция $f(x, y)$ задана следующими двумя равенствами:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ при } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ и } f(0,0) = 0.$$

Эта функция не является непрерывной в точке (0, 0) (см. § 40). Однако в этой точке она имеет частные производные по x и y. Действительно, вдоль каждой из координатных осей Ox и Oy $f(x, y)$ есть

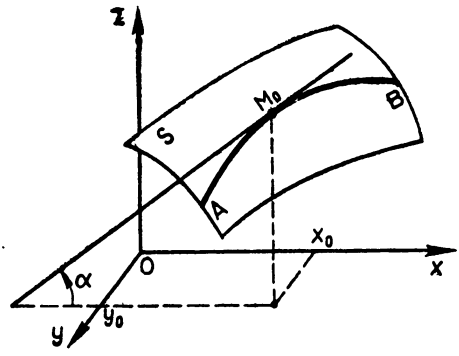


Рис. 17

константа, равная нулю: $f(x, 0)=0$ и $f(0, y)=0$, а потому $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ существуют, причем $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

В случае функции двух независимых переменных частным производным можно дать простое геометрическое истолкование. Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой точке (x_0, y_0) своей области определения имеет частные производные по x и y: $f'_x(x_0, y_0)$ и $f_y(x_0, y_0)$, и пусть геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ в трехмерном пространстве является поверхность S (рис. 17). Выбранным значениям $x = x_0$ и $y = y_0$ на поверхности S соответствует точка $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Для получения $f'_x(x_0, y_0)$, т. е. частной производной функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), надо в выражении для функции $f(x, y)$ положить $y = y_0$ и потом найти в точке x_0 производную по x от функции $f(x, y_0)$ одной переменной. Таким образом,

$$f'_x(x_0, y_0) = \left[\frac{df(x, y_0)}{dx}\right]_{x=x_0}.$$

Замечая теперь, что на плоскости $y=y_0$ графиком функции $f(x, y_0)$ служит некоторая плоская кривая AM_0B, по которой поверхность S пересекается этой плоскостью (параллельной координатной плоскости xOz), и исходя из геометрического смысла производной функции одной переменной, мы можем заключить, что частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ есть тангенс угла α, образованного с положительным направлением оси Ox касательной, проведенной в точке $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ к кривой, полученной от сечения поверхности S ($z = f(x, y)$) плоскостью $y = y_0$, параллельной плоскости xOz:

$$f'_x(x_0, y_0) = \left[\frac{df(x, y_0)}{dx}\right]_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ характеризует, таким образом, крутизну поверхности $z = f(x, y)$ в соответствующей ее точке M_0 в направлении оси Ox, вдоль кривой AB, лежащей в плоскости $y = y_0$.

Совершенно аналогично выясняется геометрическое значение другой частной производной $f'_y(x_0, y_0)$. Именно $f'_y(x_0, y_0)$ есть тангенс угла β между положительным направлением оси Oy и касательной, проведенной в точке $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = x_0$:

$$f'_y(x_0, y_0) = \left[\frac{df(x_0, y)}{dy}\right]_{y=y_0} = \operatorname{tg}\beta$$

(соответствующий чертеж читатель легко сделает сам).

Таким образом, *частные производные* $f'_x(x_0, y_0)$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$ *геометрически означают угловые коэффициенты касательных в точке* $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ *к плоским кривым, представляющим собой соответственно на плоскостях* $y = y_0$ *и* $x = x_0$ *графики функций* $z = f(x, y_0)$ *и* $z = f(x_0, y)$.

§ 43. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Как известно, дифференциал dy функции одной переменной определяется как главная (линейная) часть приращения Δy этой функции:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x = dy + \alpha\Delta x,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (и, значит, $\Delta y - dy$ есть бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с Δx).

Таким образом, дифференциал dy функции одной переменной характеризуется следующими двумя свойствами: 1) он линейно зависит от Δx и 2) разность $\Delta y - dy$ есть величина бесконечно малая высшего порядка сравнительно с Δx. Именно на этих свойствах основана большая часть приложений дифференциала. Поэтому при введении понятия дифференциала функции нескольких переменных мы будем исходить из аналогичных соображений.

1. Понятие дифференцируемости функции и полного дифференциала. Рассмотрим функцию двух независимых переменных $u = f(x, y)$, определенную в некоторой области. Пусть (x_0, y_0) — точка этой области. Придадим значениям x_0 и y_0 соответственно произвольные приращения Δx и Δy при одном лишь условии: точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ должна принадлежать области определения функции. Тогда и сама функция $u = f(x, y)$ получит некоторое (полное) приращение: $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Введем следующее определение.

Определение 1. *Функция $u = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:*

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (1)$$

где A и B не зависят от приращений Δx и Δy), а α и β — некоторые функции от Δx и Δy, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy и обращающиеся в нуль при $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$.*

Говорят при этом, что равенство (1) выражает *условие дифференцируемости функции $u = f(x, y)$ в данной точке (x_0, y_0)*.

Функцию, дифференцируемую в каждой точке некоторого множества E, называют *дифференцируемой на этом множестве*. (Если при этом точками множества E исчерпываются все точки, в которых функция дифференцируема, то E называют *областью дифференцируемости функции*.)

Например, для функции $u = x^3 - 5xy + y^2$ областью дифференцируемости является вся плоскость xOy. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке (x, y) имеет вид:

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - 5(x + \Delta x)(y + \Delta y) + \\ + (y + \Delta y)^2 - x^3 + 5xy - y^2,$$

*) Коэффициенты A и B, вообще говоря, зависят от x_0 и y_0. При этом здесь не исключается возможность одновременного обращения этих чисел в нуль.

т. е.

$$\Delta u = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 5x\Delta y - \\ -5y\Delta x - 5\Delta x\Delta y + 2y\Delta y + \Delta y^2{}^{*)},$$

или

$$\Delta u = (3x^2 - 5y)\Delta x + (2y - 5x)\Delta y + \\ + (3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x + (\Delta y - 5\Delta x)\Delta y. \qquad (2)$$

Полагая $3x^2 - 5y = A, 2y - 5x = B, 3x\Delta x + \Delta x^2 = \alpha, \Delta y - 5\Delta x = \beta$, мы получим представление Δu в виде (1), так как A и B не зависят от Δx и Δy, а $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Условие (1) дифференцируемости функции в точке можно записать в иной форме. Введем в рассмотрение выражение:

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \qquad (3)$$

где Δx и Δy одновременно не равны нулю. Геометрически ρ представляет собой расстояние между точками (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Очевидно, что если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то $\rho \to 0$, и, наоборот, если $\rho \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ (а следовательно, α и β стремятся к нулю**)). Мы, таким образом, вместо двух независимо одна от другой стремящихся к нулю переменных Δx и Δy вводим в рассмотрение одну бесконечно малую ρ, относительно которой можем определять порядок других бесконечно малых.

Перепишем теперь сумму $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ из (1) (где $\rho \neq 0$) в виде

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho.$$

Вводя обозначение $\varepsilon = \alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}$, получим: $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \varepsilon\rho$, где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, так как при $\rho \to 0$ переменные α и β стремятся к нулю, а множители при них ограничены: $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$ (см (3)).

Итак, если приращение Δu функции $u = f(x, y)$ представимо в форме (1), то оно представимо в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho, \qquad (4)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. (Когда $\rho = 0$, дополнительно полагаем здесь и $\varepsilon = 0$.)

Обратно, из представимости Δu в виде (4) следует представимость Δu в форме (1). В самом деле, если Δu представимо в виде (4),

---

*) Здесь и далее мы будем вместо записей $(\Delta x)^3$, $(\Delta y)^3$ и им подобных писать Δx^3, Δy^3 и т. п.

**) В сущности здесь идет речь о двух эквивалентных формах выражения определения предела — через квадратную и круговую окрестности.

то (считая, что Δx и Δy одновременно не равны нулю) можно представить $\varepsilon\rho$ в виде:

$$\varepsilon\rho = \frac{\varepsilon\rho^2}{\rho} = \frac{\varepsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\rho} = \frac{\varepsilon\Delta x}{\rho}\Delta x + \frac{\varepsilon\Delta y}{\rho}\Delta y.$$

Полагая здесь $\alpha = \frac{\varepsilon\Delta x}{\rho}$, $\beta = \frac{\varepsilon\Delta y}{\rho}$, получим $\varepsilon\rho = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, так как $|\alpha| = |\varepsilon| \frac{|\Delta x|}{\rho} \leqslant \varepsilon$, $|\beta| = |\varepsilon| \frac{|\Delta y|}{\rho} \leqslant \varepsilon$, и $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, а $\rho \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Мы тем самым пришли к представлению Δu в форме (1). Таким образом, при Δx и Δy, одновременно не равных нулю, условия (1) и (4) эквивалентны. Если же $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$, то как из (1), так и из (4) находим $\Delta u = 0$, и снова эти условия эквивалентны.

Сумма $A\Delta x + B\Delta y$ первых двух слагаемых в правых частях формул (1) и (4) есть выражение линейное относительно Δx и Δy. Выражение же $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, вообще говоря, не является линейным относительно Δx и Δy, так как переменные α и β, в свою очередь, в общем случае зависят от Δx и Δy (исключая, например, случай, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$).

Сумму $A\Delta x + B\Delta y$ называют *главной частью приращения* Δu, так как оставшееся в (4) слагаемое $\varepsilon\rho$ есть величина бесконечно малая по сравнению с ρ ($\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, или, что то же, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$), а значит, и с указанной суммой (если A и B одновременно не равны нулю).

Обобщая определение дифференциала функции одной независимой переменной на случай функции двух переменных, приходим к следующему определению.

Определение. *Главная, линейная относительно приращений* Δx *и* Δy, *часть приращения* Δu *дифференцируемой в точке* (x, y) *функции* $u = f(x, y)$, *т. е. выражение* $A\Delta x + B\Delta y$ *из* (1), *называется ее полным дифференциалом**) *в этой точке и обозначается символом* du *или* $df(x, y)$.

Например, согласно равенству (2) функция $u = x^3 - 5xy + y^2$ имеет полный дифференциал, и он равен $du = (3x^2 - 5y)\Delta x + (2y - 5x)\Delta y$.

Итак, полный дифференциал функции $u = f(x, y)$ имеет вид:

$$du = A\Delta x + B\Delta y,$$

где A и B не зависят от Δx и Δy.

Таким образом, понятие полного дифференциала в случае функции нескольких независимых переменных определено не для всякой функции, имеющей частные производные, а только для дифференцируемой функции (см. ниже замечание). Установим теперь некоторые условия дифференцируемости функции.

---

*) Часто для сокращения речи слово «полный» здесь опускают и говорят просто «дифференциал».

2. Необходимые условия дифференцируемости функции. ***Теорема 1.*** *Если функция* $u = f(x, y)$ *дифференцируема в некоторой точке* (x, y), *то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то для любых Δx и Δy, не выводящих точку $(x_0+\Delta x, y_0 + \Delta y)$ за пределы области определения данной функции, ее приращение Δu представимо в форме (1), откуда прямо следует, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta u = 0$, а так как $f(x, y)$ еще и определена в точке (x_0, y_0) то это и означает, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) (см. § 41).

Теорема 2. *Если функция* $u = f(x, y)$ *определена в некоторой области и дифференцируема в какой-либо ее точке* (x_0, y_0), *то она имеет в этой точке обе частные производные* $f'_x(x_0, y_0)$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$.

Доказательство. Так как функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то приращение Δu этой функции представимо в виде (1). Полагая в (1) $\Delta x \neq 0$, а $\Delta y = 0$, получаем $\Delta_x u = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Деля обе части этого равенства на Δx, найдем $\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = A + \alpha$. Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A + \alpha)$ существует и равен A, следовательно, при $\Delta x \to 0$ и предел отношения $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$ (из предыдущего равенства) существует и также равен A, так что в точке (x_0, y_0) существует частная производная $f'_x(x, y)$, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$.

Совершенно аналогично доказывается, что в точке (x_0, y_0) существует частная производная функции $f(x, y)$ по y, причем $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Следствие 1. *Если выражение* $A\Delta x + B\Delta y$ *представляет собой полный дифференциал* du *функции* u *в точке* (x_0, y_0), *то коэффициенты* A *и* B *в этом выражении определяются данной точкой однозначно.*

Действительно, по только что доказанному $A = f'_x(x_0, y_0)$ и $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Следствие 2. *Функция* $f(x, y)$, *разрывная в данной точке* (x_0, y_0), *а также не имеющая хотя бы одной из частных производных в этой точке, не может быть дифференцируемой в ней.*

Следствие 3. *Условие дифференцируемости функции* $u = f(x, y)$ *в данной точке* (x_0, y_0) *можно записать в следующей форме:*

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon\rho,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

Замечание. Обратные утверждения к теоремам 1 и 2 неверны: из непрерывности функции $f(x, y)$ в данной точке, а также из существования ее частных производных в этой точке еще не сле-

дует дифференцируемость функции в данной точке. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию

$$u = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точке (0, 0) (см. § 40) и имеет в ней частные производные:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

и $f'_y(0, 0) = 0$ (находится аналогично).

Полное приращение данной функции в точке (0, 0) будет:

$$\Delta u = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Если предположить, что рассматриваемая функция дифференцируема в точке (0, 0), то мы будем иметь: $\Delta u = 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon\rho$, или $\dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \varepsilon \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, где ε должно стремиться к нулю при ρ, стремящемся к нулю. Последнее равенство должно иметь место при любых Δx и Δy, а значит, в частности, оно должно иметь место и при $\Delta x = \Delta y$. Но тогда имеем: $\dfrac{\Delta x}{\sqrt{2}} = \varepsilon \sqrt{2}\,|\Delta x|$. Отсюда получаем, что $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и к нулю стремиться не может, что противоречит допущению.

Таким образом, рассматриваемая функция непрерывна в точке (0, 0), имеет в ней частные производные, а тем не менее не дифференцируема в этой точке. Как видим, здесь нарушается аналогия с функциями одной переменной: существование производной и дифференцируемость функции одной переменной означает одно и то же; в случае же функции двух переменных утверждение «функция дифференцируема в данной точке» не равнозначно утверждению «функция имеет частные производные по всем аргументам в этой точке», оно означает нечто большее.

3. Выражение полного дифференциала через частные производные. Пользуясь теоремой 2, мы можем переписать выражение для полного дифференциала du в данной точке (x_0, y_0) следующим образом:

$$du = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Условимся понимать под дифференциалами dx, dy независимых переменных x, y произвольные приращения Δx, Δy этих переменных, т. е. будем считать, что $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда выражение для полного дифференциала du (беря в нем вместо точки (x_0, y_0) произвольную точку (x, y)) можем переписать в виде

$$du = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy,$$

или, в других обозначениях,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy. \tag{5}$$

Таким образом, *полный дифференциал дифференцируемой в точке* (x, y) *функции* $u = f(x, y)$ *равен сумме произведений ее частных производных в этой точке на дифференциалы соответствующих независимых переменных.* Следовательно, операция составления полного дифференциала дифференцируемой функции сводится к нахождению ее частных производных.

Обратно, если известен полный дифференциал функции, то по его выражению можно получить частные производные этой функции (следствие 1).

4. Достаточные условия дифференцируемости. Возникает теперь вопрос об условиях, которые гарантировали бы дифференцируемость функции $f(x, y)$. Одно из таких достаточных условий дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если функция* $f(x, y)$ *имеет в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *частные производные* $f'_x(x_0, y_0)$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$, *непрерывные в самой точке* (x_0, y_0), *то данная функция дифференцируема в этой точке* (*и, следовательно, имеет дифференциал*).

Доказательство. Рассмотрим полное приращение данной функции:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \tag{6}$$

где точка $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ принадлежит рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0). Перепишем (6) в виде

$$\Delta u = [f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0 + \Delta y)] + [f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)].$$

Разность $f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0 + \Delta y)$, стоящую в первой квадратной скобке, можно рассматривать как приращение функции $f(x,\ y_0 + \Delta y)$ одной переменной x (соответствующее приращению Δx). Так как по условию функция $u = f(x, y)$ имеет частные производные в окрестности точки (x_0, y_0), то функция $f(x, y_0 + \Delta y)$ на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (или $[x_0 + \Delta x, x_0]$, если $\Delta x < 0$) имеет производную по x, совпадающую с частной производной $f'_x(x, y_0 + \Delta y)$. Поэтому к рассматриваемой разности на указанном сегменте можно применить теорему Лагранжа:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Аналогично для разности $f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$ получаем:

$$f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

Таким образом,

$$\Delta u = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ \ y_0 + \Delta y)\,\Delta x + f'_y(x_0,\ \ y_0 + \theta_2 \Delta y)\,\Delta y, \tag{7}$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

Так как θ_1 и θ_2 — величины ограниченные, то при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $\theta_1 \Delta x \to 0$, $\theta_2 \Delta y \to 0$; следовательно, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ аргументы частных производных $f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ и $f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y)$ стремятся соответственно к x_0 и y_0. Но тогда в силу непрерывности частных производных в точке (x_0, y_0) имеем:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0),\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0).$$

Отсюда

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha, \tag{8}$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta, \tag{9}$$

где α и β стремятся к нулю вместе с Δx и Δy.

В силу равенств (8) и (9) соотношение (7) можно представить в виде

$$\Delta u = f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а это и означает, что функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что функция $f(x, y)$, имеющая частные производные, может не быть дифференцируемой и, следовательно, не иметь дифференциала в данной точке (x, y) лишь в том случае, когда хотя бы одна из частных производных разрывна в этой точке.

Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости функции. Это уже видно хотя бы из того, что для функции одной переменной, которую можно рассматривать и как функцию от двух переменных, указанные условия не необходимы. В этом можно также убедиться и на примере функции

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в каждой точке (x, y) (см. § 40). При всех значениях x и y она имеет частные производные. Для точек, отличных от точки (0, 0), эти производные есть:

$$f'_x(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y(x,y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

В точке же (0, 0) частные производные находим непосредственно:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{|\Delta x|}\right)=0.$$

Аналогично находим, что и $f'_y(0, 0) = 0$.

Частная производная $f'_x(x, y)$ разрывна*) в точке (0, 0), так как не имеет в ней предела. Действительно, рассмотрим $f'_x(x, y)$ в точках оси Ox при $x > 0$. Имеем:

$$f'_x(x,0)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Предел первого слагаемого в точке $x = 0$ равен нулю, а предел второго в этой точке не существует (сравни т. I, § 39, пример 10), и, следовательно, функция $f'_x(x, 0)$ в точке $x = 0$ не имеет предела, а значит, и $f'_x(x, y)$ в точке (0, 0) не имеет предела.

Однако рассматриваемая функция дифференцируема в точке (0, 0). В самом деле,

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)=$$
$$=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\rho^2\sin\frac{1}{\rho}.$$

Полагая $A = B = 0$ и $\varepsilon = \rho\sin\dfrac{1}{\rho}$, получим для $\rho \neq 0$: $\Delta f(0, 0)=0\Delta x+0\Delta y+\varepsilon\rho$, где $\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$. Это равенство остается в силе и при $\rho = 0$ (тогда ε полагается равным нулю). Значит, данная функция дифференцируема в точке (0, 0).

Из теорем 3 и 1 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие. *Если функция $u = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в некоторой точке (x_0, y_0), то она и сама непрерывна в этой точке.*

Теорема 3 позволяет устанавливать дифференцируемость и находить полные дифференциалы для широкого класса функций двух независимых переменных.

Пример 1. Установить в соответствующей области дифференцируемость функции $u = \ln^2(x - y)$ и найти ее полный дифференциал.

Р е ш е н и е. Частные производные данной функции: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2\ln(x-y)}{x-y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2\ln(x-y)}{y-x}$ существуют и непрерывны во всех точках полупло-

*) Здесь и $f'_y(x, y)$ в той же точке разрывна.

скости, лежащей под прямой $y = x$ (где $y < x$). Следовательно, для этих точек данная функция дифференцируема; по формуле (5) имеем при $y < x$:

$$du = \frac{2\ln(x-y)}{x-y}\,dx + \frac{2\ln(x-y)}{y-x}\,dy,$$

или

$$du = \frac{2\ln(x-y)}{x-y}\,(dx - dy).$$

Понятие дифференцируемости и полного дифференциала функции трех и большего числа переменных вводятся совершенно так же, как и для функции двух переменных.

Функция $u = f(x, y, z, \ldots, w)$, определенная в некоторой n-мерной области, называется дифференцируемой в точке $(x, y, z, \ldots, w)$ этой области, если ее полное приращение в данной точке можно представить в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \ldots + M\Delta w + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z + \ldots + \mu\Delta w,$$

где A, B, C, ..., M — некоторые величины, не зависящие от Δx, Δy, Δz, ..., Δw, а $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, $\gamma \to 0$, ..., $\mu \to 0$, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, ..., $\Delta w \to 0$.

Аналогично теореме 3 доказывается теорема: *если функция $f(x, y, z, \ldots, w)$ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ имеет частные производные по аргументам $x, y, z, \ldots, w$ и если эти частные производные непрерывны в самой точке $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$, то функция $f(x, y, z, \ldots, w)$ дифференцируема в этой точке.*

Полным дифференциалом du такой функции в данной точке называется главная, линейная относительно приращений всех аргументов, часть полного приращения функции в этой точке, т. е.

$$du = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \ldots + M\Delta w.$$

Также устанавливают, что $A = \frac{\partial u}{\partial x}$, $B = \frac{\partial u}{\partial y}$, $C = \frac{\partial u}{\partial z}$, ..., $M = \frac{\partial u}{\partial w}$, где эти производные вычисляются в данной точке $(x_0, y_0, \ldots, w_0)$, и, полагая $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, ..., $dw = \Delta w$, получают для полного дифференциала формулу, аналогичную формуле (5):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial w}\,dw. \qquad (10)$$

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $w = z^2 e^{\cos(xy)}$.

Решение. Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -yz^2 \sin xy e^{\cos(xy)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -xz^2 \sin(xy)\, e^{\cos(xy)}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{\cos(xy)},$$

Частные производные эти непрерывны в любой точке (x, y, z). Следовательно, данная функция всюду дифференцируема, и по формуле (10) имеем: $du = e^{\cos(xy)}\,[-yz^2 \sin(xy)\,dx - xz^2 \sin(xy)\,dy + 2zdz]$.

Понятие полного дифференциала имеет важное значение в теории приближенных вычислений.

Используя обозначение $du = A\Delta x + B\Delta y$, перепишем формулу (1) полного приращения дифференцируемой функции в следующем виде:

$$\Delta u = du + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

откуда

$$\Delta u - du = \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где α и β стремятся к нулю вместе с Δx и Δy.

Но, как известно (с. 161), записанная разность между полным приращением и полным дифференциалом является величиной бесконечно малой более высокого порядка малости, чем бесконечно малая $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, если Δx и Δy бесконечно малые. Следовательно, при достаточно малых (по абсолютной величине) приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом, т. е. записать следующее приближенное равенство:

$$\Delta u \approx du, \tag{11}$$

которое дает тем лучшее приближение для Δu, чем меньше (по абсолютной величине) приращения Δx и Δy.

Соотношением (11) широко пользуются в приближенных вычислениях, заменяя приращение Δu функции $u = f(x, y)$, которое может сложным образом зависеть от Δx и Δy, ее полным дифференциалом du, зависящим от Δx и Δy линейно. Это соотношение можно переписать и так:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \tag{12}$$

Формула (12) применяется для приближенного вычисления значения $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ функции $f(x, y)$.

Пример 3. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$. Очевидно, решение данной задачи сводится к вычислению $f(1{,}03;\ 0{,}98)$.

Легко подсчитать значение $f(x, y)$ при $x = 1$ и $y = 1$. В самом деле, $f(1, 1) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = 0$. Заметив это, мы в качестве исходных значений x и y примем $x = 1$, $y = 1$, а в качестве приращений Δx и Δy примем соответственно: $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}02$.

Частные производные функции $f(x, y)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)}, \quad f'_y(x,y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)}$$

непрерывны в точке (1, 1), и, следовательно, функция $f(x, y)$ дифференциру-

ема в этой точке, а значит, она имеет в этой точке дифференциал $df(1, 1) = f'_x(1, 1)\,\Delta x + f'_y(1, 1)\,\Delta y$. Так как $f'_x(1, 1) = \frac{1}{3}$, а $f'_y(1, 1) = \frac{1}{4}$, то $df(1, 1) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 + \frac{1}{4}(-0{,}02) = 0{,}005$.

С помощью формулы (12) можем записать: $f(1 + 0{,}03;\ 1 - 0{,}02) \approx f(1, 1) + df(1, 1)$ или $f(1{,}03;\ 0{,}98) = \ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1) \approx 0{,}005$.

Пример 4. Цилиндр с радиусом основания $r = 20$ *см* и высотой $h = 40$ *см* подвергается равномерному нагреванию. В некоторый момент времени радиус цилиндра увеличился на 2 *мм*, а высота — на 1 *мм*. На сколько увеличился при этом объем цилиндра?

Р е ш е н и е. Объем цилиндра определяется по формуле $v = \pi r^2 h$.

Частные производные функции v: $\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi rh$, $\frac{\partial v}{\partial h} = \pi r^2$ непрерывны в любой точке (r, h); следовательно, функция v имеет дифференциал. Поэтому приближенное значение приращения объема можно найти по формуле:

$$\Delta v \approx dv = \frac{\partial v}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial v}{\partial h}\Delta h,$$

или

$$\Delta v \approx 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Полагая здесь $r = 20$ *см*, $h = 40$ *см*, $\Delta r = 0{,}2$ *см*, $\Delta h = 0{,}1$ *см*, получим: $\Delta v \approx 2\pi \cdot 20 \cdot 40 \cdot 0{,}2 + \pi 20^2 \cdot 0{,}1 = 360\,\pi$ (*куб. см*).

Приближенной формулой (12) пользуются также при оценке погрешностей вычисления.

Пусть требуется вычислить значения величины $u = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — дифференцируемая функция. При этом значения величин x и y являются приближенными (например, они представляют результаты каких-либо измерений). Пусть x_0 и y_0 обозначают эти приближенные значения, а Δx и Δy, соответственно, истинные погрешности, с которыми взяты значения x_0 и y_0, причем точные значения величин Δx и Δy, вообще говоря, нам неизвестны; известно лишь, что они удовлетворяют неравенствам:

$$|\Delta x| \leqslant \bar{\Delta} x,\quad |\Delta y| \leqslant \bar{\Delta} y,$$

где $\bar{\Delta} x$ и $\bar{\Delta} y$ — наибольшие по абсолютной величине погрешности, которые могут быть допущены при получении значений x и y (т. е. границы абсолютных величин значений погрешностей Δx и Δy).

Легко понять, что значение u, вычисленное по приближенным значениям x_0 и y_0 величин x и y, будет, вообще говоря, содержать некоторую погрешность. Важно оценить эту погрешность, т. е. найти максимальную абсолютную погрешность для вычисления значения величины u.

Истинная погрешность, получающаяся при вычислении значения функции u, очевидно, равна $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, или $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, т. е. она представляет собой полное приращение Δu функции u:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Оценим сначала абсолютную величину дифференциала функции $du = f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y$:

$$|du| \leqslant |f'_x(x_0,y_0)|\cdot|\Delta x| + |f'_y(x_0,y_0)|\cdot|\Delta y|,$$

откуда и подавно

$$|du| \leqslant |f'_x(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}x + |f'_y(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}y. \tag{13}$$

Так как разность $\Delta u - du = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ при достаточно малых Δx и Δy может быть сделана как угодно малой, то мы, считая Δx и Δy достаточно малыми, заменим в (13) $|du|$ на $|\Delta u|$ и будем принимать для $|\Delta u|$ следующую оценку:

$$|\Delta u| \leqslant |f'_x(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}x + |f'_y(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}y. \tag{14}$$

Неравенство (14) показывает, что абсолютная величина истинной погрешности, возникающей при вычислении значения функции $u = f(x, y)$, не превосходит величины, стоящей в правой части этого неравенства. Эту величину естественно принять в качестве *максимальной абсолютной погрешности* $\bar{\Delta}u$ (границы абсолютных величин значений Δu).

Итак,

$$\bar{\Delta}u = |f'_x(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}x + |f'_y(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}y. \tag{15}$$

Для того чтобы судить о точности значения, вводят понятие *максимальной относительной погрешности* или границы относительной погрешности вычисления.

Отношение максимальной абсолютной погрешности $\bar{\Delta}a$ (т. е. границы погрешности) вычисления некоторой величины a к приближенному значению a_0 этой величины, взятому по абсолютной величине, называется максимальной относительной погрешностью (или границей относительной погрешности) вычисления величины a и обозначается:

$$\delta a = \frac{\bar{\Delta}a}{|a_0|}.$$

Граница относительной погрешности вычисления значения функции $u = f(x, y)$ согласно (15) равна

$$\delta u = \frac{\bar{\Delta}u}{|f(x_0,y_0)|} = \frac{|f'_x(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}x + |f'_y(x_0,y_0)|\,\bar{\Delta}y}{|f(x_0,y_0)|}.$$

Так как

$$\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} = \frac{\partial}{\partial x}\ln|f(x,y)|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} = \frac{\partial}{\partial y}\ln|f(x,y)|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

то имеем:

$$\delta u = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f(x,y)|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right|\cdot\bar{\Delta}x + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f(x,y)|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right|\cdot\bar{\Delta}y,$$

или, короче,

$$\delta u = \bar{\Delta}\ln|u|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}. \tag{16}$$

Таким образом, *граница относительной погрешности вычисления некоторой функции* $u = f(x, y)$ *равна границе погрешности вычисления натурального логарифма этой функции.*

С помощью формул (16) и (15) легко получаются правила, применяемые в теории приближенных вычислений.

1. Пусть $u = xy$. Применяя формулы (16) и (15), получаем:

$$\delta u = \bar{\Delta} \ln |u| = \bar{\Delta} \ln |x,y| = \frac{|y|}{|xy|}\bar{\Delta}x + \frac{|x|}{|xy|} = \frac{\bar{\Delta}x}{|x|} + \frac{\bar{\Delta}y}{|y|},$$

или

$$\delta u = \delta x + \delta y,$$

т. е. *максимальная относительная погрешность (граница относительной погрешности) произведения равна сумме максимальных относительных погрешностей (сумме границ относительных погрешностей) сомножителей.*

2. Пусть $u = \frac{x}{y}$. Аналогично найдем:

$$\delta u = \bar{\Delta} \ln \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{\bar{\Delta}x}{|x|} + \frac{\bar{\Delta}y}{|y|} = \delta x + \delta y, \qquad (17)$$

т. е. *максимальная относительная погрешность частного равна сумме максимальных относительных погрешностей делимого и делителя.*

Пример 5. При определении диаметра капилляра весовым способом пользуются формулой $D = 2\sqrt{\frac{P}{\pi l \rho}}$. Определить величину максимальной относительной погрешности измерения, зная, что масса P столбика ртути равна 76 *мг*, средняя длина l его равна 1,75 *мм*, плотность ρ ртути равна 13,55 *мг/мм*^{3} и что максимальные абсолютные погрешности при определении величин P, l и ρ соответственно равны: $\bar{\Delta}P = 2$ *мг*, $\bar{\Delta}l = 0{,}005$ *мм*, $\bar{\Delta}\rho = 0{,}01$ *мг/мм*^{3}.

Р е ш е н и е. По формуле (16) максимальная относительная погрешность измерения D равна: $\delta D = \bar{\Delta} \ln |D| = \bar{\Delta} \ln D$. Так как $\ln D = \frac{1}{2}\ln P - \frac{1}{2}\ln \pi + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln \rho - \frac{1}{2}\ln l$, то по (17) имеем:

$$\bar{\Delta} \ln D = \frac{\bar{\Delta}P}{2P} + \frac{\bar{\Delta}\pi}{2\pi} + \frac{\bar{\Delta}l}{2l} + \frac{\bar{\Delta}\rho}{2\rho}.$$

Принимая $\pi \approx 3{,}142$ (с точностью до 0,005), получаем:

$$\bar{\Delta} \ln D = \frac{2}{2 \cdot 76} + \frac{0{,}005}{2 \cdot 3{,}142} + \frac{0{,}005}{2 \cdot 1{,}75} + \frac{0{,}01}{2 \cdot 13{,}55} \approx 0{,}015.$$

Итак, максимальная относительная погрешность измерения равна 1,5%.

§ 44. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

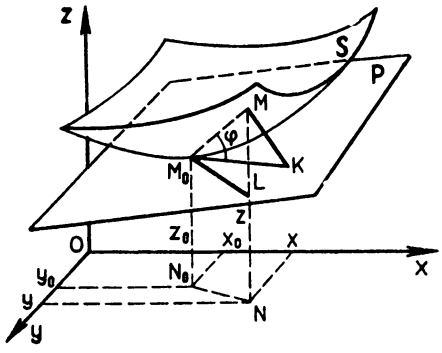


Рис. 18

Условию дифференцируемости функции двух переменных можно дать геометрическое истолкование. Предварительно введем понятие касательной плоскости к поверхности в данной точке.

Рассмотрим поверхность S, заданную уравнением $z=f(x,y)$. Выберем на данной поверхности какую-либо точку $M_0(x_0,y_0, z_0)$ и, зафиксировав ее, возьмем на этой же поверхности произвольным образом еще одну точку $M(x, y, z)$. Проведем секущую M_0M (рис. 18). Введем следующее определение.

Определение. *Плоскость P, проходящая через точку M_0, называется касательной плоскостью к поверхности S в данной точке M_0, если угол между этой плоскостью и секущей M_0M (точнее говоря, один из этих углов) стремится к нулю, когда расстояние M_0M стремится к нулю, по какому бы закону точка M, оставаясь на поверхности, ни приближалась к точке M_0.*

Предполагая, что функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), покажем, что касательная плоскость P к поверхности S в соответствующей точке $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ существует и имеет уравнение

$$Z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(Y - y_0), \qquad (1)$$

где Z — аппликата точки, лежащей на плоскости P.

Положим, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $z = f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Тогда условие дифференцируемости функции z (с. 162) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \varepsilon\rho, \qquad (2)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

Опустим из точки M перпендикуляр MK на плоскость, заданную уравнением (1). Угол между секущей M_0M и плоскостью (1), т. е. $\angle MM_0K$, обозначим через φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$.

Для того чтобы доказать, что плоскость (1) является касательной к поверхности S в точке M_0, достаточно убедиться, что: 1) плоскость (1) проходит через точку M_0 и 2) угол φ, или, что здесь равносильно, $\sin\varphi$, стремится к нулю, когда точка M стремится по

поверхности к точке M_0. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Из $\triangle MM_0K$ имеем:

$$0 \leqslant |\sin\varphi| = \frac{MK^{*)}}{M_0M}.$$

Опустим перпендикуляр MN на плоскость xOy. Точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью (1) обозначим через $L^{**)}$. Тогда, замечая, что $MK \leqslant ML$ (MK — перпендикуляр, а ML — наклонная при $K \neq L$ к плоскости (1)), $N_0N \leqslant M_0M$ (где $N_0(x_0, y_0)$ — проекция точки M_0 на плоскость xOy, так что N_0N — проекция M_0M на эту плоскость), имеем:

$$0 \leqslant |\sin\varphi| = \frac{MK}{M_0M} \leqslant \frac{ML}{N_0N} = \frac{ML}{\rho}.$$

Учитывая (1) (с $X = x$ и $Y = y$) и (2), находим:
$ML = |z \text{ (поверхности)} - Z \text{ (плоскости)}| = |z - z_0 - f'_x(x_0, y_0) \times (x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)| = |(z - z_0) - [f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)]| = |(z - z_0) - [(z - z_0) - \varepsilon\rho]| = |\varepsilon\rho|$.
Поэтому $0 \leqslant |\sin\varphi| \leqslant \frac{|\varepsilon\rho|}{\rho}$, или $0 \leqslant |\sin\varphi| \leqslant |\varepsilon|$.

Если точка M стремится к точке M_0, то $\rho \to 0$, а вместе с ρ и $\varepsilon \to 0$. Отсюда $\lim\limits_{M \to M_0} \sin\varphi = 0$, а следовательно, здесь и $\lim\limits_{M_0M \to 0} \varphi = 0$, и, таким образом, утверждение 2 доказано.

Итак, *дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) с геометрической точки зрения означает наличие касательной плоскости* (не перпендикулярной плоскости xOy) *к поверхности с уравнением $z = f(x, y)$ в соответствующей точке $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.*

Имеет место и обратное утверждение: если в точке $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ поверхность, являющаяся геометрическим изображением непрерывной функции $z = f(x, y)$, имеет касательную плоскость, не перпендикулярную к плоскости xOy, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $N_0(x_0, y_0)$.

На доказательстве этого утверждения мы останавливаться не будем.

Замечание. Можно было бы доказать, что если в точке M_0 поверхности S существует касательная к ней плоскость, то все касательные прямые, проведенные через данную точку ко всевозможным кривым, лежащим на данной поверхности и проходящим через точку M_0, лежат в этой касательной плоскости. Это свойство касательных прямых можно было бы принять за само определение касательной плоскости; в наших предположениях о виде поверхности такое определение эквивалентно принятому в тексте.

---

*) Равенство $\varphi = 0$, а следовательно, и равенство $\sin\varphi = 0$ будут иметь место только в том случае, если точка M окажется на плоскости (1).

**) Вид уравнения (1) показывает, что соответствующая плоскость не перпендикулярна к плоскости xOy.

Пример. Функция $z = f(x, y) = \sqrt{26 - x^2 - y^2}$ в достаточно малой окрестности точки (1, 3) пл. xOy имеет частные производные

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{26 - x^2 - y^2}},$$

непрерывные в этой окрестности. Следовательно, поверхность, являющаяся геометрическим изображением данной функции, в соответствующей точке (1, 3, 4) имеет касательную плоскость. По формуле (1) запишем уравнение этой плоскости:

$$Z - 4 = f'_x(1,3)(X - 1) + f'_y(1,3)(Y - 3).$$

Так как $f'_x(1, 3) = -\frac{1}{4}$, $f'_y(1, 3) = -\frac{3}{4}$, то предыдущее уравнение можно переписать так:

$$Z - 4 = -\frac{1}{3}(X - 1) - \frac{3}{4}(Y - 3),$$

и окончательно (переходя одновременно к малым буквам x, y, z) будем иметь: $4x + 9y + 12z - 79 = 0$.

Пользуясь понятием касательной плоскости, можно дать *геометрическое истолкование понятия полного дифференциала.*

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда полный дифференциал этой функции в данной точке будет: $dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$. Так как $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, то dz можно переписать в виде:

$$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{3}$$

Сопоставляя (1) и (3), получим: $dz = Z - z_0$.

Таким образом, *полный дифференциал функции* $z = f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) *геометрически представляет собой приращение* LM *аппликаты* NL *касательной плоскости к поверхности, изображающей функцию, в точке* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *при переходе из точки* (x_0, y_0) *плоскости* xOy *в точку* $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. 18).

§ 45. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

С производной сложной функции мы уже встречались при изучении функции одной переменной (т. I, § 68). Тогда была выведена следующая важная формула: $u'_t = u'_x \cdot x'_t$, где $u = f(x)$ и $x = \varphi(t)$. На этой формуле основана почти вся практика дифференцирования функций от одной переменной. Обобщим теперь эту формулу на сложные функции нескольких переменных.

1. Пусть с помощью соотношений

$$u = f(x, y) \tag{1}$$

и

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2}$$

где $(x, y) \in D$ (D — область определения функции u) и t меняется на некотором промежутке L, задана на L сложная функция

$$u = f[\varphi(t), \psi(t)]. \tag{3}$$

Рассмотрим вопрос о существовании производной этой функции по t.

Теорема. *Если при данном значении t из промежутка L функции (2) имеют производные* $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ и $\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ *и в некоторой окрестности точки (x, y) (где x и y найдены при взятом t по (2)) функция (1) дифференцируема, то сложная функция (3) имеет в точке t производную* $\frac{du}{dt}$, *причем*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Доказательство. Дадим переменной t некоторое приращение $\Delta t \neq 0$, $t + \Delta t \in L$; тогда x и y получат соответственно приращения Δx и Δy и вследствие этого функция $u = f(x, y)$ получит некоторое приращение Δu. Так как функция u дифференцируема в точке (x, y), то приращение Δu функции u в этой точке может быть записано в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{5}$$

где Δx и Δy представляют собой приращения функций (2), вызванные выбранным приращением Δt независимой переменной t, а α и β — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$; при этом полагаем $\alpha = \beta = 0$ при $\Delta x = \Delta y = 0$ (с. 159). Разделив обе части равенства (5) на Δt, будем иметь:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{6}$$

Пусть теперь Δt стремится к нулю. Поскольку величины $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ не зависят от Δt, то при этом предельном переходе они могут рассматриваться как величины постоянные (при выбранном значении t). Существование пределов отношений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ обеспечено условием существования производных функций (2): $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$. Далее, из существования $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t следует непрерывность функций (2) в этой точке, так что при $\Delta t \to 0$ $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а следовательно, и $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$*). Отсюда вытекает, что при $\Delta t \to 0$ каждое слагаемое правой части

*) Здесь по существу применяется теорема о пределе сложной функции (с. 145).

равенства (6) стремится к пределу и, значит, выражение $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ имеет при $\Delta t \to 0$ предел $\frac{du}{dt}$, причем:

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \beta \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, для составления производной $\frac{du}{dt}$ сложной функции, заданной равенствами (1) и (2), достаточно вычислить частные производные функции (1) по x и y, умножить каждую из этих частных производных на производную по t соответствующей функции из (2) и полученные произведения сложить.

Пример 1. Пусть $u = x^2 + xy + y^2$, где $x = e^{3t}$, $y = \cos 2t$.

Функции x и y имеют всюду производные по t: $\frac{dx}{dt} = 3e^{3t}$, $\frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y$ функции u существуют и непрерывны в любой точке (x, y), и, следовательно, применима формула (4):

$$\frac{du}{dt} = 3(2x + y)e^{3t} - 2(x + 2y)\sin 2t = 3(2e^{3t} + \cos 2t)e^{3t} -$$

$$-2(e^{3t} + 2\cos 2t)\sin 2t.$$

Замечание 1. Ясно, что формула (4) является обобщением формулы $u'_t = u'_x \cdot x'_t$ для случая функции u от одной переменной t. Отметим, однако, разницу в условиях, при которых были получены эти формулы. При выводе формулы $u'_t = u'_x x'_t$ было достаточно предположения о существовании производной u'_x, здесь же для справедливости формулы (4) недостаточно условия одного существования частных производных u'_x и u'_y (нужно более сильное условие — дифференцируемость функции u). Убедимся в этом на следующем примере. Функция

$$u = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

имеет частные производные во всех точках, включая, как мы видели (§ 43), точку (0, 0), причем $u'_x = f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$.

Введем новую переменную t, полагая в выражении для $f(x, y)$

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t, \qquad (8)$$

Тогда с помощью (7) и (8) определится сложная функция u от t. По формуле (4) производная u'_t этой функции в точке $t = 0$ была бы равна $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t = 0$, так как $u'_x = f'_x(0, 0) = 0$, $u'_y = f'_y(0, 0) = 0$.

Однако из (7) и (8) следует, что $u = \frac{|t|}{\sqrt{2}}$, так что в точке $t = 0$ производная функции u не существует (т. I, с. 249).

Мы видим, что формула (4) к данной функции u в точке $t = 0$ неприменима, хотя частные производные в соответствующей точке (0, 0) и существуют.

Замечание 2. Условия теоремы будут в отношении функции $f(x, y)$ заведомо выполнены, если предположить, что $f(x, y)$ имеет в соответствующей окрестности непрерывные частные производные (с. 164).

При рассмотрении вопроса о производной сложной функции особого внимания заслуживает часто встречающийся случай, когда функция (3) одной независимой переменной t задается следующим образом: $u = f(t, y)$, $y = \psi(t)$. При таком задании функции u последняя зависит от переменной t как непосредственно, так и через промежуточную переменную y. В этом случае, полагая в формуле (4) $x = t$ и замечая, что при этом $\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1$, получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{9}$$

В обеих частях формулы (9) фигурируют производные функции u по независимой переменной t, однако эти производные представляют собой различные объекты. Производная $\frac{\partial u}{\partial t}$, являющаяся первым слагаемым правой части формулы (9), есть частная производная функции u по t; она вычисляется при условии, что величина y остается постоянной (а значит, при вычислении этой производной не учитывается, что u зависит от t также через посредство y). Напротив, при вычислении производной $\frac{du}{dt}$, стоящей в левой части равенства (9), учитывается как непосредственная зависимость u от t, так и зависимость u от t через посредство y.

В отличие от частной производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ производная $\frac{du}{dt}$ называется *полной производной* функции u по t, равенство же (9) в этой связи называется *формулой полной производной*. Вычисляя производную функции u по этой формуле, часто говорят, что дифференцируют эту функцию полным образом.

Совершенно аналогично решается вопрос о существовании и вычислении производной $\frac{du}{dt}$ и в том случае, когда u задается как функция любого числа переменных, каждая из которых,

в свою очередь, есть некоторая функция t. Так, в случае, когда $u = f(x, y, z, w)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $w = \omega(t)$, при аналогичных допущениях справедлива следующая формула:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

В частности, если $u = f(t, y, z, w)$, где $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $w = \omega(t)$, т. е. если u зависит от t как непосредственно, так и через посредство промежуточных переменных y, z и w, то, полагая в предыдущей формуле $x = t$ и учитывая, что при этом $\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1$, получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{dw}{dt} — \tag{10}$$

это полная производная функции u по t.

Пример 2. Пусть $u = e^{tyz}$, где $y = \sin^2 t$, $z = \operatorname{arctg} t$.
Частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = yze^{tyz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = tze^{tyz}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = tye^{tyz} —$$

всюду непрерывны, а функции y и z имеют производные при любом значении t:

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t\cos t = \sin 2t, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Следовательно, по формуле (10) мы можем записать:

$$\frac{du}{dt} = yze^{tyz} + tze^{tyz}\sin 2t + tye^{tyz}\frac{1}{1+t^2} = e^{t\sin^2 t\operatorname{arctg} t}\left(\sin^2 t\operatorname{arctg} t + \right.$$
$$\left. + t\sin 2t\operatorname{arctg} t + \frac{t\sin^2 t}{1+t^2}\right).$$

2. Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой области D и аргументы x и y этой функции в свою очередь являются функциями нескольких переменных, например, двух:

$$x = \varphi(t, \tau), \quad y = \psi(t, \tau), \tag{11}$$

причем t и τ изменяются в такой области D_1, что соответствующие значения функций x и y не выходят за пределы области D. В таком случае u является в D_1 сложной функцией переменных t и τ: $u = f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)] = F(t, \tau)$.

Выясним условия существования частных производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ этой функции и найдем формулы для их вычисления.

Полагая, что в данной точке (t, τ) функции (11) имеют частные производные $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial \tau}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ и в некоторой окрестности точки (x, y), где x и y вычисляются по (11) во взятой точке (t, τ), функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в D, мы можем при решении поставленной задачи воспользоваться формулой (4). Действительно, чтобы получить, например, частную производную $\frac{\partial u}{\partial t}$, мы должны аргумент τ считать постоянным. Но тогда в силу (11) переменные x и y становятся функциями только одной независимой переменной t, и задача сводится к нахождению производной от u по t, т. е. к задаче, рассмотренной в п. 1. При сделанных допущениях производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ в точке (t, τ), таким образом, существует и может быть вычислена по формуле (4), только здесь вместо производных $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ надо писать частные производные $\frac{\partial x}{\partial t}$ и $\frac{\partial y}{\partial t}$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Аналогично находится частная производная от u по τ:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}.$$

Итак, *частная производная сложной функции* $u = f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)] = F(t, \tau)$ *равна сумме произведений частных производных заданной функции по промежуточным аргументам* (x и y) *на частные производные этих аргументов по соответствующей независимой переменной* (t и τ).

Для случая сложных функций любого числа промежуточных аргументов это правило естественным образом обобщается. Например, если сложная функция $F(\xi, \eta, \zeta)$ задана соотношениями: $u = f(x, y, z)$, где $x = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $y = \psi(\xi, \eta, \zeta)$, $z = \chi(\xi, \eta, \zeta)$, то при соответствующих условиях будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}.$$

В частности, если $u = f(\xi, \eta, z)$, где $z = \varphi(\xi, \eta)$, т. е. если u зависит от ξ и η как непосредственно, так и через промежуточную переменную z, то, полагая в (12) и (13) $x = \xi$ и $y = \eta$ и замечая, что при этом $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \eta} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0$, мы получим

следующие формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}, \tag{14}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ —полные частные производные, которые вычисляются по переменным ξ и η, входящим в u как непосредственно, так и через посредство функции $z=\varphi(\xi,\eta)$, а $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ — частные производные от $u = f(\xi, \eta, z)$ соответственно по переменным ξ и η, входящим в выражение $f(\xi, \eta, z)$ явно, и, следовательно, при вычислении $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ аргумент z рассматривается как постоянное. Эти производные заключены в круглые скобки, чтобы их обозначение как-то отличалось от обозначения полных частных производных.

Пример 3. Найти частные производные сложной функции $u = \sqrt{x^2+y^2}$, где $x = \varphi(t, \tau) = t\cos\tau$, $y = \psi(t, \tau) = \tau\sin t$.

Р е ш е н и е. Функции $\varphi(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$ имеют всюду частные производные: $\frac{\partial x}{\partial t} = \cos\tau$, $\frac{\partial x}{\partial \tau} = -t\sin\tau$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \tau\cos t$, $\frac{\partial y}{\partial \tau} = \sin t$.

Частные производные функции u: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ существуют и непрерывны при $x^2 + y^2 \neq 0$.

Следовательно, применяя формулы (12) и (13), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\tau + \frac{y\tau}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos t = \frac{t\cos^2\tau + \tau^2\cos t\sin t}{\sqrt{t^2\cos^2\tau + \tau^2\sin^2 t}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{-tx}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\tau + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin t = \frac{\tau\sin^2 t - t^2\sin\tau\cos\tau}{\sqrt{t^2\cos^2\tau + \tau^2\sin^2 t}}.$$

Пример 4. Проверить равенство $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$, если $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, где $\varphi(t)$ — любая дифференцируемая функция от t.

Р е ш е н и е. Функция z зависит от x и y непосредственно и через промежуточный аргумент $t = \frac{x}{y}$, при этом, так как функция $t = \frac{x}{y}$ (для $y \neq 0$) дифференцируема, то по теореме о дифференцируемости сложной функции функция $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, а с ней и функция z дифференцируема для $y \neq 0$, и формулы (14) применимы. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 1 + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 1 + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

(φ' означает производную функции φ по аргументу t.)

Отсюда получим:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y} + y - \frac{x}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) = x + y,$$

т. е., действительно, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

§ 46. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Как и в т. I, § 73, здесь будет рассмотрен вопрос о форме полного дифференциала сложной функции. Так как число независимых переменных и число вспомогательных переменных здесь не играют существенной роли, то мы для упрощения в записях ограничимся рассмотрением случая сложной функции с двумя вспомогательными переменными и двумя независимыми переменными.

Пусть соотношениями

$$u = f(x, y), \text{ где } x = \varphi(t, \tau),\ y = \psi(t, \tau) \tag{1}$$

задана некоторая сложная функция u независимых переменных t и τ. Предположим, что в точке (t, τ) функции $\varphi(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$ имеют непрерывные частные производные по t и по τ, а в некоторой окрестности точки (x, y) существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, непрерывные в самой точке (x, y). При этих условиях сложная функция $u = f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)]$ имеет в точке (t, τ) частные производные (§ 45):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}. \tag{2}$$

Из формул (2) видно, что частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ непрерывны в точке (t, τ). Следовательно, функция $u = f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)]$ имеет в точке (t, τ) полный дифференциал, который согласно формуле (5) (§ 43) можно записать в виде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial \tau}d\tau. \tag{3}$$

Подставив в (3) вместо $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ их выражения из (2), получим:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)d\tau.$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial \tau}d\tau\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial \tau}d\tau\right). \tag{4}$$

Так как по условию функции x и y имеют в точке (t, τ) непрерывные частные производные, то в этой точке функции x и y имеют полные дифференциалы

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial \tau}d\tau,\quad dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial \tau}d\tau.$$

Вследствие этого формулу (4) можно переписать в виде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{5}$$

Следовательно, полный дифференциал сложной функции (1) при указанных условиях существует и выражается соотношением (5). Но как раз таким же образом выражается и полный дифференциал функции $u = f(x, y)$, когда x и y—независимые переменные (см. формулу (5) из § 43), т. е. как и в случае функции одной переменной для функции двух переменных имеет место *свойство инвариантности формы полного дифференциала.* Мы установили, таким образом, следующую важную т е о р е м у: *полный дифференциал функции* $u = f(x, y)$ *выражается одной и той же формулой, как в случае, когда аргументы* x *и* y *— независимые переменные, так и в том случае, когда эти аргументы в свою очередь являются теми или иными функциями от нескольких независимых переменных* (лишь бы эти функции имели соответствующие непрерывные частные производные).

Правда, в зависимости от того, являются ли аргументы x и y независимыми переменными или функциями, меняется смысл символов dx и dy, фигурирующих в формуле (5). Если аргументы x и y— независимые переменные, то dx и dy являются символами произвольно взятых приращений этих аргументов, т. е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$. Напротив, если аргументы x и y рассматриваются как функции других переменных, то dx и dy являются символами их полных дифференциалов, причем теперь, вообще говоря, уже $dx \neq \Delta x$ и $dy \neq \Delta y$, так как полный дифференциал функции в общем случае не равен ее полному приращению.

З а м е ч а н и е. Все предыдущие рассуждения будут справедливы и в том случае, когда x и y будут зависеть от различных переменных, например $x = \varphi(t)$, $y = \psi(\tau, \zeta)$, так как в этом случае мы всегда можем считать, что $x = \varphi_1(t, \tau, \zeta)$, $y = \psi_1(t, \tau, \zeta)$.

Опираясь на наличие инвариантности формы дифференциала, легко доказать формулы, аналогичные соответствующим формулам для вычисления дифференциалов от алгебраической суммы, произведения и частного двух функций одного переменного.

Пусть u и v — дифференцируемые функции каких-либо переменных. Тогда:

$$1)\ d(u \pm v) = du \pm dv;\ 2)\ d(uv) = udv + vdu;\ 3)\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}\ (v \neq 0). \tag{6}$$

Докажем, например, справедливость последней из указанных формул. Для этого рассмотрим функцию $z = \frac{u}{v}$ (двух аргументов u и v). Предположим сначала, что аргументы u и v — независимые переменные; тогда $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, а потому полный дифференциал рассматриваемой функции будет: $dz = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv$ или $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

В силу инвариантности формулы полного дифференциала эта формула будет верна и в том случае, когда u и v сами являются дифференцируемыми функциями любого числа переменных.

Аналогично доказывается справедливость двух первых формул (6).

Из доказанной теоремы также следует, что если u — дифференцируемая функция любого числа переменных и $f(u)$ дифференцируема, то

$$df(u) = f'(u)\,du. \tag{7}$$

Пример. Найти полный дифференциал и частные производные функции $u = \ln(1 + x^2 + y^4)$.

Р е ш е н и е. Пользуясь формулой (7) и первой из формул (6), находим:

$$du = \frac{1}{1+x^2+y^4}\,d(1 + x^2 + y^4) = \frac{2x\,dx + 4y^3\,dy}{1 + x^2 + y^4}.$$

Отсюда, далее, видно, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^4}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{4y^3}{1 + x^2 + y^4}$.

§ 47. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $u = f(x, y)$ имеет в некоторой области определения D частную производную по одной из переменных, например по x. Тогда производная $f'_x(x, y)$ является функцией тех же переменных x и y, определенной в области D. Может случиться, что эта функция имеет в некоторой области определения D_1 ($D_1 \subset D$) частную производную по той же переменной x или по другой переменной y. Полученные таким образом частные производные называются *частными производными второго порядка* или просто *вторыми частными производными функции* $f(x, y)$. В связи с этим частная производная $f'_x(x, y)$ называется частной производной *первого порядка* или первой частной производной от $f(x, y)$.

Вторая частная производная от $f(x, y)$ (т. е. первая от $f'_x(x, y)$) по переменной x обозначается: $f''_{xx}(x, y)$, или $f''_{x^2}(x, y)$, или u''_{x^2}, или $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Итак, по определению

$$f''_{x^2}(x, y) = u''_{x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [f'_x(x, y)]'_x.$$

Обозначения $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются чисто символическими. Эти записи нельзя рассматривать как дроби. Символ ∂x^2 в знаменателе заменяют также условно символом $\partial x\,\partial x$; точно так же запись индекса x^2 при f (или u) часто заменяется записью xx.

Вторая частная производная от $f(x, y)$ (т. е. первая от $f'_x(x, y)$) по переменной y обозначается $f''_{xy}(x, y)$, или u''_{xy}, или $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$, или $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$. Итак,

$$f''_{xy}(x, y) = u''_{xy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = [f'_x(x, y)]'_y.$$

Расположение (слева направо) букв x, y при символах ∂x, ∂y соответствует принятому порядку дифференцирования.

Аналогично последовательно определяются и записываются частные производные третьего, четвертого и т. д. порядков (третьи, четвертые и т. д. производные). Например, каждый из вариантов записи

$$f'''_{xyx}(x, y) = u'''_{xyx} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = [f''_{xy}(x, y)]'_x$$

обозначает 3-ю частную производную функции $f(x, y)$. Здесь функция $f(x, y)$ сначала дифференцируется по x, потом по y и, наконец, — снова по x.

Символ

$$f^{IV}_{xyxx}(x, y) = u^{IV}_{xyxx} = \frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x\, \partial x} = \frac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x\, \partial x} = [f'''_{xyx}(x, y)]'_x$$

обозначает одну из частных производных четвертого порядка функции $f(x, y)$.

Понятие частной производной n-го порядка (n-й частной производной) может быть введено индуктивно. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n$ — какая-либо комбинация цифр 1, 2, ..., n, из которых некоторые (или даже все) могут быть в этой комбинации равными. Тогда частная производная n-го порядка от функции u по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ обозначается символом

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{n-1}} \partial x_{i_n}} \qquad (*)$$

и определяется с помощью индуктивного соотношения:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{n-1}}\, \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right).$$

В этом символе, как уже указывалось, некоторые из $x_{i_k} (1 \leqslant k \leqslant n)$ могут быть равными между собой. Пусть $x_{i_{s_1}}, x_{i_{s_2}}, \ldots, x_{i_{s_n}} (s_1 = 1)$ — различные из аргументов $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, входящих в запись (*), и пусть в этой записи $x_{i_{s_1}}$ повторяется α_1 раз подряд, считая сначала $(s_1 = 1)$, вслед за этим $x_{i_{s_2}}$ повторяется α_2 раз подряд и т. д., наконец, $x_{i_{s_r}}$ повторяется α_r раз подряд. Тогда символ (*) принято обычно записывать сокращенно следующим образом:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_{s_1}}^{\alpha_1}\, \partial x_{i_{s_2}}^{\alpha_2} \ldots \partial x_{i_{s_r}}^{\alpha_r}}$$

Очевидно, функция двух переменных может, вообще говоря, иметь две частных производных первого порядка, четыре частных производных второго порядка и вообще 2^m частных производных порядка m.

Для функции трех и большего числа переменных частные производные высших порядков определяются и обозначаются аналогично.

Частная производная порядка $n > 1$ от данной функции называется ее *частной производной высшего порядка.*

Частные производные высшего порядка от функции, вычисленные по различным аргументам, называются смешанными частными производными. Так, например, производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}$ и т. п.—смешанные. Вычислим, например, частные производные второго порядка функции

$$u = f(x, y, z) = 7x^2y^2 - 3y^2z + 5xz.$$

Последовательно находим: $\frac{\partial u}{\partial x} = 14xy^2 + 5z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 14x^2y - 6yz$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3y^2 + 5x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 14y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 28xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 28xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 14x^2 - 6z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -6y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} = -6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Можно заметить, что здесь $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}$, т. е. что смешанные частные производные, вычисленные по одним и тем же переменным, но в разном порядке, совпадают. Этим свойством обладает широкий класс функций. Достаточное условие, при котором значение смешанных частных производных не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования, устанавливается следующей теоремой.

Теорема*). *Если в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *функция* $f(x, y)$ *имеет смешанные частные производные* $f''_{xy}(x, y)$ *и* $f''_{yx}(x, y)$ *и эти производные непрерывны в самой точке* (x_0, y_0), *то они в этой точке равны:*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Возьмем числа $h \neq 0$ и $k \neq 0$ (не нарушая общности, будем считать их положительными), и притом настолько малыми, чтобы в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) содержался весь прямоугольник $[x_0, x_0 + h;\ y_0, y_0 + k]$. Составим выражение:

$$A = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

*) Мы ограничимся рассмотрением теоремы для функции двух переменных.

Преобразуем выражение A. Положим:

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0). \quad (1)$$

Так как по условию в окрестности точки (x_0, y_0) существует производная $f''_{xy}(x, y)$, то существует в этой окрестности и производная $f'_x(x, y)$, а, следовательно, функция $\varphi(x)$, определенная равенством (1), имеет на сегменте $[x_0, x_0 + h]$ производную, равную

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0). \quad (2)$$

Найдем значение $\varphi(x)$ на концах упомянутого сегмента:

$$\varphi(x_0) = f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0); \quad \varphi(x_0 + h) =$$
$$= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0).$$

Теперь выражение A можно записать в виде:

$$A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

Правая часть последнего равенства представляет собой приращение функции $\varphi(x)$, когда ее аргумент x получает приращение h. Поскольку функция $\varphi(x)$ имеет производную на сегменте $[x_0, x_0 + h]$, то к ней можно на $[x_0, x_0 + h]$ применить теорему Лагранжа:

$$A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h),$$

где $0 < \theta_1 < 1$, или согласно (2)

$$A = h[f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)]$$
$$(x_0 < x_0 + \theta_1 h < x_0 + h).$$

В квадратной скобке последнего равенства мы имеем приращение функции $f'_x(x_0 + \theta_1 h, y)$, соответствующее изменению аргумента y от y_0 до $y_0 + k$. Пользуясь тем, что функция $f'_x(x_0 + \theta_1 h, y)$ на сегменте $[y_0, y_0 + k]$ имеет производную по y (ибо в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) существует $f''_{xy}(x, y)$, применим к этой функции на сегменте $[y_0, y_0 + k]$ снова теорему Лагранжа; будем иметь:

$$A = hkf''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \quad (0 < \theta_1 < 1; 0 < \theta_2 < 1) \quad (3)$$

Преобразуем теперь выражение A другим способом. Положим:

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

В силу сделанных относительно функции $f(x, y)$ предположений функция $\psi(y)$ имеет производную на $[y_0, y_0 + k]$:

$$\psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y).$$

Найдя значения $\psi(y_0) = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\psi(y_0 + k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)$ и объединив в выраже-

нии A первое слагаемое с третьим и второе — с четвертым, мы можем записать:

$$A = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0).$$

Далее, рассуждая так же, как и выше, мы можем это выражение представить в следующем виде:

$$A = khf''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k) \quad (0 < \theta_3 < 1;\ 0 < \theta_4 < 1). \quad (4)$$

Сопоставляя между собой равенства (3) и (4), находим:

$$hkf''_{xy}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + \theta_2 k) = khf''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k).$$

После деления обеих частей этого равенства на общий множитель $hk \neq 0$, получим:

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + \theta_2 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k). \quad (5)$$

Это равенство получено в предположении, что h и k отличны от нуля. О справедливости же его при $h = 0$ и $k = 0$ мы прямо ничего не можем сказать. Поэтому полагать в нем $h = 0$ и $k = 0$ мы не имеем права.

Будем $h \neq 0$ и $k \neq 0$ неограниченно приближать к нулю. Вместе с h и k будут стремиться к нулю и $\theta_1 h$, $\theta_2 k$, $\theta_3 k$ и $\theta_4 h$ (так как θ_1 θ_2, θ_3 и θ_4 остаются ограниченными при любых h и k), и, следовательно, при $h \to 0$ и $k \to 0$ аргументы в обоих смешанных производных будут стремиться соответственно к x_0 и y_0. Но тогда, в силу предположенной непрерывности смешанных производных f''_{xy} и f''_{yx} в точке (x_0, y_0), имеем:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + \theta_2 k) = \lim_{\substack{\theta_1 h\to 0\\ \theta_2 k\to 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + \theta_2 k) = f''_{xy}(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k) = \lim_{\substack{\theta_4 h\to 0\\ \theta_3 k\to 0}} f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h,\ y_0 + \theta_3 k) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Следовательно, переходя в обеих частях равенства (4) к пределу при $h \to 0$ и $k \to 0$, получим требуемое:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (6)$$

Доказанную теорему коротко можем сформулировать так: *результат двух последовательных частных дифференцирований по различным переменным* (при указанных в теореме условиях) *не зависит от порядка дифференцирования.*

Следствие. *Если смешанные частные производные* $f''_{xy}(x, y)$ *и* $f''_{yx}(x, y)$ *непрерывны на некотором множестве* D, *то они совпадают на этом множестве.*

В случае невыполнения условий теоремы равенство (6) может и не быть выполнено. Действительно, рассмотрим функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

В любой точке, отличной от точки (0, 0), первые и вторые производные данной функции могут быть вычислены по обычным правилам. Имеем:

$$f'_x(x, y) = y\left[\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]; \quad f'_y(x, y) = x\left[\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{x^6+9x^2y^4+2y^6}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1+9\left(\frac{y}{x}\right)^4+2\left(\frac{y}{x}\right)^6}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^3} \text{ (для } x \neq 0).$$

В точке (0, 0) находим f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} по определению частной производной:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h, 0)-f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0, 0+k)-f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0,$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f'_x(0, 0+k)-f'_x(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{2k}{k} = 2,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_y(0+h, 0)-f'_y(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1.$$

Отсюда видим, что для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. Невыполнение равенства (6) связано здесь с тем, что вторые частные производные f''_{xy} и f''_{yx} разрывны в точке (0, 0). Действительно, на прямой $y = kx$, где k — постоянная, а $x \neq 0$:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{1+9k^4+2k^6}{(1+k^2)^3}$$

есть константа, значение которой различно для различных k. Поэтому пределы $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f''_{xy}(x, y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f''_{yx}(x, y)$ не существуют, а, следовательно, производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ разрывны в точке (0, 0).

Обобщим доказанную теорему на производные любого порядка и на случай функции любого числа переменных.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена в m-мерной области D и пусть в этой области данная функция имеет всевозможные частные производные до $(n-1)$-го ($n \geqslant 2$) порядка включительно и смешанные производные n-го порядка, причем все эти производные непрерывны в D. Докажем, что при этих условиях смешанные производные n-го порядка функции u, содержащие дифференцирования по одним и тем же аргументам одинаковое число раз и отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой в области D, т. е. что значение любой n-й смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования.

Рассмотрим сначала две смешанные производные второго порядка функции u: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i}$, отличающиеся друг от друга только порядком последовательного дифференцирования.

При вычислении этих производных (по аргументам x_i и x_j) всем другим аргументам функции u можно приписать постоянные значения. Следовательно, с этой точки зрения функцию u можно рассматривать как функцию двух аргументов x_i и x_j. Далее, по условию производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ непрерывны по всей совокупности аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а в таком случае эти производные, очевидно, непрерывны и по совокупности аргументов x_i и x_j. Но тогда согласно следствию из доказанной теоремы можно записать:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Пусть теперь $n > 2$. Покажем, что при вычислении смешанной производной n-го порядка можно изменить порядок двух смежных дифференцирований, не меняя значения производной, т. е. докажем справедливость равенства:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_n}}. \quad (7)$$

(Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$ — некоторое размещение из m индексов 1, 2, 3, ..., m по n с возможными повторениями.)

Положим, что мы продифференцировали данную функцию (k—1) раз по тем переменным (взятым в определенном порядке), которые указаны в левой части равенства (7); в результате мы получим некоторую функцию

$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Будем далее дифференцировать функцию φ сначала по x_{i_k}, а затем по $x_{i_{k+1}}$, получим:

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}. \quad (8)$$

Теперь ту же функцию продифференцируем сначала по $x_{i_{k+1}}$, а потом по x_{i_k}:

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}. \quad (9)$$

Применим к производным (8) и (9) уже доказанную для $n = 2$ теорему, получим:

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}. \quad (10)$$

Выражения, стоящие в левой и правой части равенства (10), будем дифференцировать по одним и тем же переменным $x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}$ и в одном и том же порядке. Это не нарушит равенства (10), а значит, окажется справедливым и равенство (7). Так как любая перестановка порядка дифференцирования может быть достигнута рядом перестановок двух смежных дифференцирований, то отсюда следует, что значение любой n-й смешанной частной производной не зависит от порядка дифференцирования по различным аргументам.

При выполнении условий доказанной теоремы общее выражение для производной n-го порядка $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_n}}$ можно записать в более простом виде:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_r^{\alpha_r}},$$

где $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = n$.

Например, вместо $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2}$ тогда можно написать $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x_1^3\,\partial x_2^2}$.

При условии независимости смешанных производных от порядка дифференцирования значительно уменьшается число различных между собой частных производных высших порядков и совокупность их делается более обозримой. Например, функция $u = f(x, y)$ при условии непрерывности соответствующих производных имеет три различные производные второго порядка: f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy} *), четыре производных третьего порядка: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, и вообще $(n+1)$ производных n-го порядка $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial^n u}{\partial x\,\partial y^{n-1}}$, $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n}$.

§ 48. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Аналогично с определением дифференциалов высших порядков функции от одной переменной вводится понятие дифференциалов высших порядков функции нескольких переменных. Для сокращения записи мы ограничимся при этом рассмотрением случая функции двух переменных.

Пусть $u = f(x, y)$ — функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в данной области D_1. Тогда в этой области функция u имеет полный дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, \tag{1}$$

причем здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения независимых переменных x и y. Зафиксируем эти приращения Δx и Δy. Тогда дифференциал du будет функцией только переменных x и y, заданной в области D_1.

Допустим, что в некоторой области $D_2 \subset D_1$ функция u имеет непрерывные частные производные второго порядка. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и поэтому они дифференцируемы в D_2. Следовательно, будет дифференцируемой в D_2 и функция du. В таком случае существует полный дифференциал от дифференциала du. Этот дифференциал

*) Указание на аргументы здесь для краткости опущено.

называется относительно исходной функции $u = f(x, y)$ ее *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* и обозначается символом d^2u или $d^2f(x, y)$. Полный дифференциал du в связи с этим естественно назвать *дифференциалом первого порядка*. Таким образом, по определению

$$d^2u = d(du).$$

При этом, по самому определению считается, что при вычислении $d(du)$ выбраны те же самые приращения $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ независимых переменных x и y, что и были взяты при составлении du.

Пользуясь правилами дифференцирования (§ 46) и учитывая, что dx и dy здесь постоянные величины, найдем выражение для d^2u

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right) =$$

$$= dx\, d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + dy\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Применяя формулу (1) к $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, получаем:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy.$$

Поэтому

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

В силу непрерывности смешанных частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ они равны, и потому

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \qquad (2)$$

Если, далее, в некоторой области D_3 функция u имеет непрерывные частные производные третьего порядка, то при фиксированных dx и dy дифференциал d^2u, как функция от x и y, имеет в D_3 дифференциал, который по отношению к исходной функции u называется ее *дифференциалом третьего порядка* или *третьим дифференциалом* и обозначается через d^3u.

Из (2) легко найдем выражение для d^3u:

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3. \qquad (3)$$

Подобным же образом вводятся понятия дифференциалов четвертого, пятого и т. д. порядков. Вообще, если в некоторой области функция u имеет непрерывные частные производные всех порядков

до n-го ($n > 1$) включительно, то можно ввести понятие дифференциала $d^n u$ n-го порядка от этой функции индуктивно, полагая

$$d^n u = d\,(d^{n-1}u).$$

Правые части формул (2) и (3) напоминают соответствующие разложения для квадрата и куба суммы двух величин. По методу математической индукции легко убедиться, что (при фиксированных dx и dy) и для дифференциала любого порядка справедлива формула:

$$d^n u = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \\ + \ldots + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} dy^n.$$

Дадим сокращенную символическую запись дифференциалов высшего порядка. Для этого прежде всего в выражении первого дифференциала условно «вынесем букву u за скобки» и запишем его символически так:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) u.$$

Если теперь в выражении d^2u также условно «вынести u за скобки», то оставшееся в скобках выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2$ формально изображает в раскрытом виде квадрат двучлена $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)$. Замечая это, запишем второй дифференциал символически следующим образом:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u. \qquad (4)$$

Запись в правой части этой формулы надо понимать так: двучлен, стоящий в скобках, надо формально возвысить в квадрат и результат почленно умножить на u, при этом u везде следует поставить рядом с ∂^2, а затем показатели степеней у символов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ посчитать указателями порядка числа последовательных дифференцирований по x и y функции u.

Аналогично можно записать символически третий дифференциал

$$d^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 u.$$

Вообще при всяком n будем иметь символическое равенство

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u, \qquad (5)$$

правую часть которого следует понимать так же, как и в равенстве (4): двучлен, стоящий в скобках, формально возводится по

формуле бинома Ньютона в n-ю степень с последующей заменой степеней $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, умноженных на u, частными производными функции u соответствующих порядков.

Формула (5) легко обобщается и на случай функции любого числа независимых переменных. Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — функция от m независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то при выполнении соответствующих условий будем иметь:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n u.$$

Пример 1. Найти дифференциал второго порядка от функции $u = x^3y^2$.
Р е ш е н и е. Сначала находим частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y.$$

Затем находим все частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^3.$$

Эти производные непрерывны на всей плоскости. Следовательно, на всей плоскости существует дифференциал d^2u. Пользуясь формулой (1), находим: $d^2u = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2$.

Дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных, так же как и дифференциалы первого порядка, можно вычислять, минуя вычисление частных производных соответствующего порядка, именно путем непосредственного применения правил дифференцирования (§ 46), через последовательное отыскание дифференциала первого, потом второго и т. д. порядков. Вычислив таким путем дифференциал k-го порядка данной функции, мы одновременно найдем сразу и все ее частные производные k-го порядка: это будут коэффициенты при степенях дифференциалов соответствующих аргументов. (Законность такого способа вычисления частных производных можно было бы обосновать совершенно так же, как это было указано в § 43 по отношению к частным производным первого порядка.) Вычислим этим способом дифференциал функции, данной в примере 1. Найдем сначала, пользуясь правилами дифференцирования, полный дифференциал первого порядка этой функции:

$$du = y^2 d(x^3) + x^3 d(y^2) = y^2\,3x^2\,dx + x^3\,2y\,dy = x^2y\,(3y\,dx + 2x\,dy).$$

Для определения d^2u дифференцируем du, помня при этом, что величины dx и dy рассматриваются здесь как постоянные и потому при дифференцировании могут быть вынесены за знак дифференциала. Учитывая это, находим:

$$d^2u = d\,[x^2y\,(3y\,dx + 2x\,dy)] = d\,(x^3y)\,(3y\,dx + 2x\,dy) + x^2y\,d\,(3y\,dx + 2x\,dy) = (2xy\,dx + x^2\,dy)\,(3y\,dx + 2x\,dy) + x^2y\,(3\,dx\,dy + 2\,dx\,dy) = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2.$$

По выражению d^2u устанавливаем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^3.$$

Такие же выражения для этих производных были найдены выше непосредственно.

Рассматривая выше вопрос о дифференциалах высшего порядка, мы предполагали, что аргументы x и y функции $u = f(x, y)$ являются независимыми переменными. При этом условии и была выведена формула для дифференциала d^nu.

Пусть теперь аргументы функции $u = f(x, y)$ не есть независимые переменные, а являются некоторыми функциями одной или нескольких независимых переменных, например двух (t и τ): $x = \varphi(t, \tau)$ и $y = \psi(t, \tau)$, причем значения x и y не выходят из области определения $f(x, y)$. Тогда существует сложная функция $u = f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)]$. Пусть эта функция имеет (в данной области определения) дифференциалы du, d^2u, d^3u, d^4u и т. д. В силу инвариантности формы первого дифференциала (§ 46) выражение для дифференциала du в рассматриваемом случае может быть записано в прежнем виде $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Однако в этой записи множители dx и dy являются дифференциалами не от независимых переменных, а от функций и, следовательно (в общем случае), будут зависеть от t и τ, а поэтому могут не быть постоянными. Учитывая это, вычислим (пользуясь правилами дифференцирования) дифференциал второго порядка рассматриваемой сложной функции:

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = dx\,d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}d(dx) + dy\,d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}d(dy) = dx\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy\right) + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}d^2y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y,$$

или

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y. \qquad (6)$$

Полученное соотношение, вообще говоря, существенно отличается от (2), являясь его обобщением. Формула (2) получается из (6), например, в том случае, когда x и y — независимые переменные (тогда $dx = \text{const}$, $dy = \text{const}$, $d^2x = 0$, $d^2y = 0$).

Мы видим, таким образом, что в отличие от дифференциала первого порядка дифференциал второго порядка уже не обладает (в общем случае) свойством инвариантности (выражение для d^2u здесь усложнилось — добавились слагаемые, зависящие от d^2x и d^2y). Отсутствие свойства инвариантности тем более относится к дифференциалам третьего порядка, четвертого и т. д.

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции $u = f(x, y)$, где $x = t^2 - \tau^2$, $y = t\tau$.

Р е ш е н и е. Здесь x и y— промежуточные аргументы, а t и τ — независимые переменные. Дифференциал d^2u будем находить по формуле (6)

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y, \qquad (7)$$

при этом $dx = 2t\,dt - 2\tau\,d\tau$, $dy = \tau\,dt + t\,d\tau$, $d^2x = 2(dt^2 - d\tau^2)$, $d^2y = 2dt\,d\tau$.

Подставляя эти значения в (7), получим:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2t\,dt - 2\tau\,d\tau)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(2t\,dt - 2\tau\,d\tau)(\tau\,dt + t\,d\tau) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\tau\,dt + t\,d\tau)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}(dt^2 - d\tau^2) + 2\frac{\partial u}{\partial y}dt\,d\tau = \left(4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}t^2 + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}t\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\tau^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)dt^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}t\tau - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\tau^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}t^2 - \right.$$

$$\left. - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}t\tau + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dt\,d\tau + \left(4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tau^2 - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}t\tau + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}t^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\tau^2.$$

Рассмотрим один частный случай, когда свойство инвариантности заведомо имеет место и для дифференциалов любого порядка. Пусть переменные x и y являются линейными функциями независимых переменных t и τ, т. е. $x = a_1t + b_1\tau + c_1$, $y = a_2t + b_2\tau + c_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 — постоянные. В этом случае для дифференциалов dx и dy будем иметь выражения: $dx = a_1\,dt + b_1\,d\tau$, $dy = a_2\,dt + b_2\,d\tau$, и при постоянных dt и $d\tau$ они также оказываются постоянными, не зависящими от t и τ. Следовательно, дифференциалы d^2x и d^2y и вообще дифференциалы высших порядков от x и y будут равны нулю, а потому в рассматриваемом случае все дифференциалы сложной функции будут иметь то же выражение, что и дифференциалы функций независимых переменных; в них дифференциалы dx и dy также совпадают с приращениями Δx и Δy, хотя теперь эти приращения уже не произвольны, а обуславливаются приращениями Δt и $\Delta\tau$ независимых переменных t и τ.

Таким образом, символическая формула (5) имеет место как в том случае, когда x и y суть независимые переменные, так и в случае, когда они суть линейные функции независимых переменных.

§ 49. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для функции $\varphi(t)$ одной переменной была выведена (т. I, § 76) формула Тейлора:

$$\Delta\varphi(t_0) = d\varphi(t_0) + \frac{1}{2!}d^2\varphi(t_0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}\varphi(t_0) +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^n\varphi(t_0 + \theta\Delta t), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (1)$$

Обобщим эту формулу на случай функции нескольких переменных. Ради сокращения записей мы снова ограничимся рассмотрением функций только от двух независимых переменных.

Пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности данной точки (x_0, y_0) имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно. Дадим x_0 и y_0 произвольные приращения h и k, но такие, чтобы точка $(x_0 + h, y_0 + k)$ не вышла за пределы упомянутой окрестности.

Введем новую независимую переменную t, связанную с переменными x и y при помощи соотношений:

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \tag{2}$$

где t изменяется на сегменте $[0, 1]$. Тогда $f(x, y)$ примет вид:

$$f(x, y) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Так как x_0, y_0, h и k — постоянные величины, то последнее выражение представляет собой некоторую сложную функцию $\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$, заданную через посредство промежуточных переменных x и y из (2).

В силу условий, наложенных на функцию $f(x, y)$, функция $\varphi(t)$ на сегменте $[0, 1]$ имеет производные до порядка n включительно (§ 45), и, следовательно (т. I, § 76), к ней на этом сегменте применима формула Тейлора (1). По этой формуле имеем:

$$\Delta\varphi(0) = d\varphi(0) + \frac{1}{2} d^2\varphi(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1}\varphi(0) + \frac{1}{n!} d^n\varphi(\theta) \quad (0 < \theta < 1). \tag{3}$$

Выразим теперь приращение $\Delta\varphi(0)$, дифференциалы $d^p\varphi(0)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ и $d^n\varphi(\theta)$ через исходную функцию $f(x, y)$.

Так как $\varphi(0) = f(x_0, y_0)$, а $\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$, то

$$\Delta\varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0). \tag{4}$$

Поскольку $\varphi(t) = f(x, y)$ есть сложная функция от t, где x и y суть линейные функции (2), то ее дифференциал любого порядка p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ может быть вычислен по символической формуле (5) (§ 48):

$$d^p\varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^p f(x, y).$$

При $t = 0$ $x = x_0$, $y = y_0$, а при $t = \theta$ $x = x_0 + \theta t$, $y = y_0 + \theta k$. Поэтому

$$d^p\varphi(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^p f(x_0, y_0), \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{5}$$

а

$$d^n\varphi(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k). \tag{6}$$

Согласно равенствам (4), (5) и (6) формулу (3) можно переписать в виде:

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0,\ y_0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n-1}f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k), \qquad (7)$$

где $0<\theta<1$, или

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=df(x_0,\ y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,\ y_0)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{n!}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k). \qquad (8)$$

Это равенство и представляет *формулу Тейлора* для функции двух переменных. Слагаемое

$$R_n=\frac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

называется *остаточным членом* (в форме Лагранжа) формулы Тейлора.

Формула Тейлора в виде (8) дает выражение приращения $\Delta f(x_0,y_0)$ функции $f(x,\ y)$ через ее дифференциалы различных порядков и может быть, таким образом, использована для приближенного вычисления этого приращения. Отбрасывая в (8) остаточный член, получим следующую приближенную формулу:

$$\Delta f(x_0,\ y_0)\approx df(x_0,\ y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,\ y_0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,\ y_0), \qquad (9)$$

сводящую вычисление приращений функции $f(x,\ y)$ в данной точке $(x_0,\ y_0)$ к вычислению значений дифференциалов этой функции различных порядков в той же точке. Ошибка, которую мы делаем при вычислении по формуле (9), равна абсолютной величине отброшенного остаточного члена.

Дадим другие формы записи формулы Тейлора.

Из (2) находим: $dx=hdt$, $dy=kdt$. Так как t — независимая переменная, то $dt=\Delta t$. Но $\Delta t=1-0=1$. Поэтому формулу (7) можно переписать в виде:

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f(x_0,\ y_0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k). \qquad (10)$$

Эта формула справедлива только для таких h и k, какие были указаны на странице 196.

Обозначая в (10) $x_0 + h$ через x, а $y_0 + k$ через y (откуда $h = x - x_0$, $k = y - y_0$), найдем:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y}\right]^n f[x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)]. \quad (11)$$

Формулы (7) и (11), очевидно, могут быть непосредственно распространены на функции любого числа переменных.

Замечание 1. На практике нередко встречается частный случай формулы (11), соответствующий предположению $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; полученную при этом разновидность формулы (11)

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(0, 0) + \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x, \theta y)$$

иногда называют *формулой Маклорена.*

Замечание 2. Положив в формуле Тейлора (10) $n = 1$, получим формулу:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1), \quad (12)$$

которая дает обобщение формулы Лагранжа (т. I, § 75) на функции двух переменных.

Замечание 3. С помощью формулы (12) нетрудно установить, что если функция $f(x, y)$, непрерывная в некоторой связной области D, имеет во всякой ее точке первые частные производные, равные нулю:

$$f'_x(x, y) = 0, \; f'_y(x, y) = 0,$$

то эта функция во всей области D сохраняет постоянное значение.

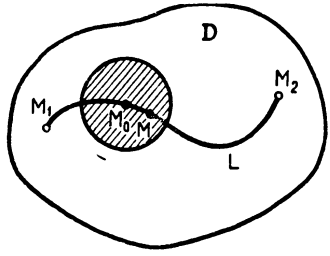


Рис. 19

Действительно, возьмем в области D какую-либо фиксированную точку $M_1(x_1, y_1)$ и затем выберем произвольную точку $M_2(x_2, y_2)$ той же области. Так как область D связная, то точки M_1 и M_2 можно соединить простой дугой $L: x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ (рис. 19), лежащей всеми своими

точками в D. Докажем, что во всех точках дуги L функция $f(x,y)$ сохраняет постоянное значение.

На дуге L функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как функцию одной переменной t: $f(x, y) = f[\varphi(t), \psi(t)]$, определенную на сегменте $[\alpha, \beta]$. Пусть $M_0[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ — произвольная точка дуги L ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$). Рассмотрим какую-либо r-окрестность этой точки, целиком принадлежащую области D*). Тогда точка $M[\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)]$ дуги L при достаточно малом приращении $\Delta t \neq 0$, при котором точка $t_0 + \Delta t$ принадлежит сегменту $[\alpha, \beta]$, будет находиться во взятой r-окрестности точки M_0: в силу непрерывности $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ существует такое число $\delta > 0$, что при $|\Delta t| < \delta$ будут выполняться неравенства: $|\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)| < \frac{r}{\sqrt{2}}$ и $|\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)| < \frac{r}{\sqrt{2}}$, и тогда окажется, что

$$M_0M = \sqrt{[\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)]^2 + [\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)]^2} < \\ < \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = r.$$

Теперь, применяя к разности $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f[\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)] - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ формулу Лагранжа (12), будем иметь:

$$f[\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)] - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = [\varphi(t_0 + \Delta t) - \\ - \varphi(t_0)] f'_x \{\varphi(t_0) + \theta[\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)], \psi(t_0) + \\ + \theta[\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)]\} + [\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)] f'_y \{\varphi(t_0) + \\ + \theta[\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)], \psi(t_0) + \theta[\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)]\} \ (0 < \theta < 1).$$

Так как по условию $f'_x = f'_y = 0$ в любой точке области D, то отсюда

$$\frac{f[\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)] - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)]}{\Delta t} = 0,$$

а тогда и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f[\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)] - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)]}{\Delta t} = 0,$$

т. е. $f'[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = 0$.

Так как значение t_0 выбрано на $[\alpha, \beta]$ произвольно, то полученное равенство показывает, что функция $f[\varphi(t), \psi(t)]$ одного переменного t имеет на сегменте $[\alpha, \beta]$ производную, тождественно равную нулю. Следовательно (т. I, § 75), сама эта функция постоянна на рассматриваемом сегменте, и, значит, в частности $f(M_2) = f(M_1)$, т. е. значение функции $f(x, y)$ в произвольной точке M_2

*) Так как D — область, то любая ее точка внутренняя (§ 35), и такая окрестность непременно существует.

области D совпадает с ее значением $C = f(M_1)$ в фиксированной наперед выбранной точке $M_1 \in D$, а это и означает, что $f(x, y) = C = \text{const}$ в этой области. Требуемое доказано.

Отсюда, далее, следует, что если полный дифференциал функции $f(x, y)$ тождественно равен нулю в некоторой связной области D, то сама эта функция $f(x, y)$ сохраняет постоянное значение в данной области.

В самом деле, полный дифференциал функции $f(x, y)$ имеет вид:

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy. \tag{13}$$

В то же время, поскольку по условию $df(x, y) = 0$, какова бы ни была точка $(x, y) \in D$, имеем:

$$df(x, y) = 0 = 0dx + 0dy. \tag{14}$$

Но представление дифференциала функции $f(x, y)$ в форме $df(x,y)=Adx+Bdy$ единственно (§ 43, следствие 1). Поэтому, сопоставляя соотношения (13) и (14), получим: $f'_x(x, y) = 0$ и $f'_y(x,y) = 0$, где бы ни лежала точка (x, y) в области D. Отсюда в силу доказанного заключаем, что $f(x, y) = \text{const}$ в области D.

ГЛАВА VIII.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

§ 50. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В т. I, § 60 было введено понятие неявной функции одной переменной. Напомним читателю приводящие к этому понятию соображения.

Функциональная зависимость между переменными величинами часто определяется некоторым уравнением, связывающим эти переменные. Так, например, уравнением

$$y = \frac{1-x}{1+x^2} \tag{1}$$

переменная y определяется как функция переменной x. Но очевидно, уравнение

$$x^2y + x + y - 1 = 0 \tag{2}$$

(связывающее те же самые переменные x и y) определяет ту же самую функцию y от x. С помощью уравнения (2) по каждому значению $x = x_0$ из $(-\infty, +\infty)$ может быть определено только одно значение $y = y_0$, которое вместе с $x = x_0$ удовлетворяет этому уравнению. При этом способ выражения функции в виде (1) отличается от способа выражения функции в виде (2) только тем, что уравнение (1) разрешено относительно функции y, а уравнение (2) нет. В соответствии с этим обычно говорят, что рассматриваемая функция задана уравнением (1) явно, а уравнением (2) — неявно. Но было бы ошибочно думать, что для каждой функции $F(x, y)$ переменных x и y равенство $F(x, y) = 0$ определяет одну из переменных как функцию другой. Например, равенство $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ни в какой области изменения действительных переменных x и y не определяет функции, потому что оно не удовлетворяется никакими действительными значениями x и y. Равенство $x^2 + y^2 - 1 = 0$ при изменении x в полусегменте $(-\infty, 1]$ также не определяет y как функцию переменной x, так как каждому значению $x \neq 1$ из указанного полусегмента соответствует два различных значения y, а именно $+\sqrt{1-x}$ и $-\sqrt{1-x}$. Однако, если в рассматриваемом равенстве ограничить не только область изменения x, но и область изменения y, это равенство может определять y (неявно) как функцию от x. Например, в области $-\infty < x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y < +\infty$ каждому значению x соответствует одно определенное значение y, именно $\sqrt{1-x}$, т. е. имеем функциональ-

ную зависимость переменной y от переменной x. В области определения $-\infty < x \leqslant 1$ и $-\infty < y \leqslant 0$ рассматриваемое равенство также задает y как функцию от x: $y = -\sqrt{1-x}$ (отличную от предыдущей).

Эти соображения приводят к следующему определению (ср. т. I., § 60): *пусть функция $F(x, y)$ определена на некотором множестве изменения переменных x и y и пусть на каком-либо множестве E значений x (для которых $(x, y) \in D$) существует такая функция $y = f(x)$, которая, будучи поставлена вместо y в уравнение*

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

обращает его на этом множестве E в тождество относительно x: $F[x, f(x)] \equiv 0$. Тогда говорят, что на данном множестве E функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением (3), *или, что мы имеем неявную функцию y от x, определенную уравнением* (3).

Например, уравнением $x^2 + y^3 - 1 = 0$ определяется для всех действительных значений x неявно функция $y = \sqrt[3]{1-x^2}$. Действительно, если в уравнение $x^2 + y^3 - 1 = 0$ вместо y подставить эту функцию, то получится тождество:

$$x^2 + (1 - x^2) - 1 \equiv 0.$$

Читатель должен иметь в виду, что, называя функцию явной или неявной, мы тем самым совсем не указываем на какое-либо определенное ее свойство, а указываем лишь на то, в какой форме она задается. Явная функция задается уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно переменной y, неявная же — уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно этой переменной. Каждая явная функция $y = f(x)$ может быть представлена и как неявная—уравнением $y - f(x) = 0$. Неявная же функция y от x, определяемая уравнением (3), может быть представлена в виде явной, если мы сумеем разрешить это уравнение относительно y.

Но не всякое уравнение $F(x, y) = 0$, которым определяется неявная функция, может быть (как это было, например, в случае уравнения $x^2 + y^3 - 1 = 0$) разрешено (в классе элементарных функций) относительно y. Рассмотрим, например, функцию от y:

$$x = \varphi(y) = y - \frac{1}{2}\sin y \quad (-\infty < y < +\infty).$$

Так как здесь $\frac{dx}{dy} = 1 - \frac{1}{2}\cos y > 0$ для всех y, то функция $\varphi(y)$ монотонно возрастает на $(-\infty, +\infty)$. Но тогда по теореме существования обратной функции мы заключаем, что существует обратная функция $y = f(x)$ к функции $x = \varphi(y)$, определяемая неявно уравнением $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$. Однако из этого уравнения функция y явно через x в элементарных функциях (в конечном виде) выражена быть не может.

Но даже тогда, когда явное изображение функции y, удовлетворяющей (3), возможно, во многих случаях гораздо удобнее рассматривать ее в неявном виде. В связи с этим возникает необходимость в указании условий, при которых уравнение (3) определяет y (или x) как неявную функцию от x (от y). При этом часто интересуются также вопросом, как по неявному заданию функции выявить некоторые ее свойства.

В следующей теореме даются достаточные условия того, чтобы уравнение (3) определяло (в некоторой окрестности данной точки) дифференцируемую неявную функцию.

Теорема (существования дифференцируемой неявной функции). *Пусть функция* $F(x, y)$:

1) определена и имеет непрерывные частные производные F'_x *и* F'_y *в некотором прямоугольнике* R:

$$[x_0 - a,\ x_0 + a;\ y_0 - b,\ y_0 + b];$$

2) в точке (x_0, y_0) *обращается в нуль*: $F(x_0, y_0) = 0$;

3) имеет частную производную $F'_y(x, y)$ *не обращающуюся в нуль в данной точке*: $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ *в некоторой окрестности* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(0 < \delta \leqslant a)$ *точки* x_0 *определяет неявную функцию* $y = f(x)$, *такую, что* $f(x_0) = y_0$. *Эта функция в названной окрестности точки* x_0 *имеет непрерывную производную* y', *причем*

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Доказательство. По условию теоремы мы имеем $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$; действительно, если было бы $F'_y(x_0, y_0) < 0$, то мы заменили бы только в уравнении $F(x, y) = 0$ функцию $F(x, y)$ функцией $-F(x, y)$, что не нарушило бы условий теоремы. Тогда, так как $F'_y(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R и, в частности, в точке (x_0, y_0), существует такой квадрат R'

$$[x_0 - \delta',\ x_0 + \delta';\ y_0 - \delta',\ y_0 + \delta'] \quad (0 < \delta' \leqslant a;\ 0 < \delta' \leqslant b)$$

с центром в точке (x_0, y_0), во всех точках которого (§ 40)

$$F'_y(x, y) > 0. \tag{4}$$

Отсюда следует, что функция $F(x, y)$ при каждом постоянном x из сегмента $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$ есть монотонно возрастающая

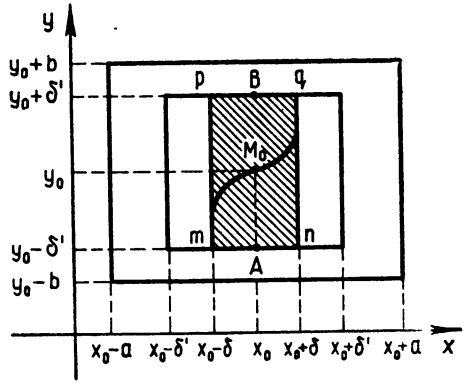


Рис. 20

функция от y на сегменте $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$. В частности, это верно и при $x = x_0$, т. е. для функции $F(x_0, y)$. В то же время по условию (2) теоремы $F(x_0, y)$ в точке y_0 сегмента $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ равна нулю: $F(x_0, y_0) = 0$. Следовательно, на концах этого сегмента функция $F(x_0, y)$ имеет разные знаки, а именно:

$$F(x_0, y_0 - \delta') < 0, \quad F(x_0, y_0 + \delta') > 0. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим две функции от x: $F(x, y_0 - \delta')$ и $F(x, y_0 + \delta')$. Так как функция $F(x, y)$ имеет в $R' \subset R$ непрерывные частные производные F'_x и F'_y, то она будет и сама непрерывна в этом квадрате R'. Но тогда (§ 44) эта функция будет непрерывна и по каждой переменной в отдельности на соответствующих сегментах. Поэтому каждая из рассматриваемых нами двух функций от x непрерывна на сегменте $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, а так как в точке x_0 этого сегмента согласно неравенств (5) функция $F(x, y_0 - \delta')$ отрицательна, а функция $F(x, y_0 + \delta')$ положительна, то существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(0 < \delta < \delta')$ точки x_0, во всех точках которой выполняются неравенства:

$$F(x, y_0 - \delta') < 0, \; F(x, y_0 + \delta') > 0. \tag{6}$$

Таким образом, в точках горизонтального отрезка mn длины 2δ с серединой в точке $A(x_0, y_0 - \delta')$ значения функции $F(x, y)$ будут отрицательны, а в точках горизонтального отрезка pq длины 2δ с серединой в точке $B(x_0, y_0 + \delta')$ значения $F(x, y)$ будут положительны (рис. 20). Заметив это, возьмем в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ произвольную точку $\bar{x}$ и зафиксируем ее. Тогда при $x = \bar{x}$ функция $F(x, y)$ становится функцией одной переменной y. Эта функция на концах сегмента $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ в силу неравенств (6) имеет значения разных знаков: $F(\bar{x}, y_0 - \delta') < 0$, $F(\bar{x}, y_0 + \delta') > 0$. Так как, далее, функция $F(\bar{x}, y)$ непрерывна на сегменте $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ и на концах этого сегмента принимает значения разных знаков, то найдется хотя бы одно значение $y = \bar{y}$, содержащееся между $y_0 - \delta'$ и $y_0 + \delta'$, где она обращается в нуль, т. е. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Легко убедиться, что $\bar{y}$ есть единственное значение y, которое при данном $x = \bar{x}$ удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$. Действительно, по доказанному выше функция $F(x, y)$ при постоянном x — монотонно возрастающая функция от y на сегменте $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$, следовательно, при $y < \bar{y}$ будем иметь $F(\bar{x}, y) < 0$, а при $y > \bar{y}$, $F(\bar{x}, y) > 0$ $(y \in [y_0 - \delta', y_0 + \delta'])$.

Таким образом, доказано, что для каждого значения x из окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ существует определенное значение y из интервала $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, которое вместе с этим x удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, т. е. доказано, что уравнение $F(x, y) = 0$ в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ определяет некоторую неявную функцию $y = f(x)$, где $y_0 - \delta' < f(x) < y_0 + \delta'$. Эта функция

при $x = x_0$ принимает значение y_0: $f(x_0) = y_0$, причем (по условию 2) $F(x_0, y_0) = 0$. В то же время другого значения y, которое вместе с $x = x_0$ удовлетворяло бы уравнению $F(x, y) = 0$, быть не может.

Докажем теперь существование у функции $y = f(x)$ непрерывной производной в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(0 < \delta \leqslant \delta')$. Возьмем какое-либо значение x_1 в этом интервале. Соответствующее ему значение y из интервала $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, определяемое уравнением $F(x, y) = 0$, обозначим через y_1. Следовательно, $F(x_1, y_1) = 0$. Дадим x_1 приращение Δx так, чтобы было: $x_0 - \delta < x_1 + \Delta x < x_0 + \delta$. Значению $x_1 + \Delta x$ будет соответствовать значение $y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x)$ функции $y = f(x)$, причем $y_0 - \delta' < y_1 + \Delta y < y_0 + \delta'$ и $F(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) = 0$. Таким образом, имеем:

$$F(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - F(x_1, y_1) = 0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$[F(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - F(x_1, y_1 + \Delta y)] + [F(x_1, y_1 + \Delta y) - F(x_1, y_1)] = 0.$$

Применяя теорему Лагранжа (законность ее применения обеспечена условиями теоремы) к записанным разностям, получим:

$$F'_x(x_1 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y)\,\Delta x + F'_y(x_1, y_1 + \theta_2 \Delta y)\,\Delta y = 0, \qquad (7)$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ и, следовательно, точки $(x_1 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y)$ и $(x_1, y_1 + \theta_2 \Delta y)$ принадлежат прямоугольной окрестности $[x_0 - \delta, x_0 + \delta; \; y_0 - \delta', \; y_0 + \delta']$. Так как $F'_y(x_1, y_1 + \theta_2 \Delta y) \neq 0$, то из равенства (7) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_1 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y)}{F'_y(x_1, y_1 + \theta_2 \Delta y)}. \qquad (8)$$

Так как по условию 1) функция $F'_x(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R, а следовательно, и в квадрате R', то по теореме 1, § 43 она ограничена в этом квадрате, т. е. существует такое число M, что $|F'_x(x, y)| \leqslant M$ для всех точек (x, y) из квадрата R'.

Поскольку по условию 1) функция $F'_y(x, y)$ также непрерывна в R, а значит, и в R', то в силу той же теоремы она ограничена снизу в R', т. е. существует такое число m, что $F'_y(x, y) \geqslant m$ в любой точке квадрата R', причем согласно (4) $m > 0$. Заметив все это, получаем (согласно (8)):

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{F'_x(x_1 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y)}{F'_y(x_1, y_1 + \theta_2 \Delta y)}\right| = \frac{|F'_x(x_1 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y)|}{F'_y(x_1, y_1 + \theta_2 \Delta y)} \leqslant \frac{M}{m},$$

откуда $|\Delta y| \leqslant \frac{M}{m} |\Delta x|$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т. е. функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Будем теперь приближать Δx к нулю, тогда, как мы только что

заметили, и Δy также будет стремиться к нулю, и вследствие непрерывности функций $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ в точке (x_1, y_1) будем иметь:

$$\lim_{\Delta x \to 0} F'_x(x_1 + \theta_1 \Delta x,\ y_1 + \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F'_x(x_1 + \theta_1 \Delta x,\ y_1 + \Delta y) = F'_x(x_1, y_1),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} F'_y(x_1,\ y_1 + \theta_2 \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F'_y(x_1,\ y_1 + \theta_2 \Delta y) = F'_y(x_1,\ y_1).$$

Так как по условию $F'_y(x_1, y_1) \neq 0$, то предел правой части равенства (8) при $\Delta x \to 0$ существует и равен $-\dfrac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}$, а следовательно, при $\Delta x \to 0$ существует и предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, причем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_1)$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ из равенства (8) находим:

$$f'(x_1) = -\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

Таким образом, функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_1. Поскольку x_1 — произвольная точка окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, то $f(x)$ имеет производную во всех точках x этой окрестности, так что для всех таких x

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Подставляя $f(x)$ вместо y в выражения для $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$, будем иметь:

$$f'(x) = -\frac{F'_x[x, f(x)]}{F'_y(x, f(x)]}.$$

Так как в числителе и знаменателе дроби, стоящей в правой части последнего равенства, имеем непрерывные функции от непрерывных же функций и знаменатель этой дроби по условию не равен нулю, то из этого равенства следует, что $f'(x)$ — непрерывная функция в интервале $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Теорема доказана полностью.

Замечание. Так как в левой части уравнения $F(x, y) = 0$ находится функция двух переменных, то аналогично предыдущему можно ставить вопрос о существовании неявной функции $x = \varphi(y)$, определяемой уравнением (3). В этом случае в формулировке теоремы, очевидно, следует только условие 2) заменить условием $F'_x(x, y) \neq 0$.

§ 51. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

Распространим понятие неявной функции на случай функции от любого числа переменных.

Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ $(n+1)$ переменных определена на некотором множестве из пространства R^{n+1} и пусть на некотором множестве E точек пространства R^{n+1} существует функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая, будучи поставлена вместо y в уравнение

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{1}$$

обращает его на E в тождество относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0 \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset E.$$

Тогда говорят, что *функция* $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *задана неявно* (на множестве E) уравнением (1), или что мы имеем неявную функцию y от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенную уравнением (1).

Например, уравнение $z^5 - y^2 - x^2 - 1 = 0$ определяет неявно функцию $z = \sqrt[5]{x^2 + y^2 + 1}$ на всей плоскости. В самом деле, если в уравнение $z^5 - y^2 - x^2 - 1 = 0$ вместо z подставить эту функцию, то получится тождество: $(x^2 + y^2 + 1) - y^2 - x^2 - 1 \equiv 0$.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не определяет, например, z как неявную функцию, так как оно не удовлетворяется никакими действительными значениями x, y и z, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ удовлетворяется лишь значениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и определяет, например, переменную z как функцию $z = 0$, рассмотренную на множестве E, состоящем всего из одной точки $(0, 0)$. Так как функции такого рода не представляют интереса, то принято говорить и в таких случаях, что уравнение не задает (нетривиальной) функции.

Все, что было сказано по поводу неявных функций от одной независимой переменной, без существенных изменений переносится на неявные функции любого числа переменных. Так же, как и в случае уравнения (3) § 50, можно дать достаточные условия, налагаемые на функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, для того чтобы уравнение (1) определяло неявную функцию y, обладающую непрерывными частными производными по всем аргументам.

Теорема. *Пусть функция* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) она определена и имеет непрерывные частные производные $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ *в некотором* $(n+1)$*-мерном параллелепипеде* R:

$$[x_1^0 - a_1,\ x_1^0 + a_1,\ x_2^0 - a_2,\ x_2^0 + a_2,\ \ldots,\ x_n^0 - a_n,\ x_n^0 + a_n,\ y_0 - b,\ y_0 + b]$$

с центром в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$;

2) в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ *она обращается в нуль:* $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0) = 0$, *в то время, как производная* F'_y *в этой точке не равна нулю:* $F'_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0) \neq 0$. *Тогда уравнение*

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ в некоторой n-мерной параллелепипедальной окрестности ω с центром в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ определяет неявную функцию $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такую, что $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = y_0$. Эта функция имеет, кроме того, в окрестности ω непрерывные частные производные по всем аргументам:

$$f'_{x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \quad f'_{x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \quad \ldots, \quad f'_{x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_y}.$$

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем, так как оно аналогично доказательству теоремы § 51.

§ 52. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Предварительно рассмотрим один определитель, играющий важную роль во многих вопросах математического анализа.

Пусть имеем m функций от m переменных: $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, которые определены на некотором m-мерном множестве и имеют на этом множестве непрерывные частные производные по всем аргументам. Составим из этих производных определитель m-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

Структура этого определителя такова: первая строка составляется из всех частных производных одной и той же функции φ_1 по всем независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Вторая, третья и т. д. строки составляются таким же образом, лишь с заменой φ_1 на φ_2, φ_3 и т. д. Этот определитель называется *функциональным определителем Якоби**) или *якобианом системы функций* $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и обозначается через

$$I(x_1, x_2, \ldots, x_m) \text{ или } \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}.$$

Последний символ не является дробью, а представляет собой целостный символ. В случае, когда $m = 1$, т. е. имеется лишь одна функция $y = \varphi_1(x_1)$ от одной переменной x_1, якобиан обращается

*) Якоби (1804—1851) — известный немецкий математик.

в производную $\frac{d\varphi_1}{dx_1}$. Таким образом, на якобиан мы можем смотреть как на обобщение понятия производной на случай системы функций от нескольких переменных.

Пусть теперь функции $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ от $n+m$ переменных определены на некотором $(n+m)$-мерном множестве. Рассмотрим систему, содержащую $n+m$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ и состоящую из m уравнений:

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1)$$

Допустим, что из этой системы можно выразить m каких-либо переменных, например $y_1, y_2, \ldots, y_m$, как функции остальных переменных:

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2)$$

Определение. *Если на некотором n-мерном множестве E существует одна и только одна система вида* (2), *состоящая из функций, которые, будучи подставлены вместо y_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ в уравнения* (1), *обращают их в тождества на E относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$:*

$$F_k[x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0,$$

то говорят, что функции (2) *заданы на множестве E неявно системой уравнений* (1), *или что мы имеем неявные функции y_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемые системой уравнений* (1).

Например, системой уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \end{cases}$$

как нетрудно проверить, определяются неявно функции $y = -3x$ и $z = 5x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Можно дать условия, налагаемые на функции $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, достаточные для того, чтобы система уравнений (1) определяла m неявных функций, к тому же обладающих непрерывными частными производными по всем аргументам.

Теорема. *Пусть функции $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) они определены и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в $(n+m)$-мерном параллелепипеде R:

$$[x_1^0 - a_1,\ x_1^0 + a_1;\ x_2^0 - a_2,\ x_2^0 + a_2;\ \ldots\ x_n^0 - a_n,\ x_n^0 + a_n;$$
$$y_1^0 - b_1,\ y_1^0 + b_1;\ \ldots;\ y_m^0 - b_m,\ y_m^0 + b_m]$$

с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$;

2) в точке M_0 эти функции обращаются в нуль: $F_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, y_1^0, \ldots, y_m^0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, *в то время как определитель Якоби*

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$$

в этой точке не равен нулю.

Тогда система из m уравнений (1) *в некоторой параллелепипедальной окрестности* ω_n *определяет непрерывные неявные функции* $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *такие, что* $f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. *Эти функции, кроме того, имеют и непрерывные частные производные по всем аргументам* (в ω_n).

Доказательство. При доказательстве теоремы воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что теорема доказана для системы, состоящей из $m - 1$ уравнений $(m > 1)$, и покажем, что она верна и для системы из m уравнений.

Обозначим через $I_1, I_2, \ldots, I_m$ алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя I и, разлагая этот определитель по элементам первого столбца, получим:

$$I = I_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + I_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + I_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1}. \tag{3}$$

Так как по условию теоремы определитель I в точке M_0 не равен нулю, то из (3) следует, что по крайней мере одно из алгебраических дополнений I_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ не равно нулю в этой точке. Не нарушая общности, будем считать, что таким дополнением является I_1 (в случае необходимости мы можем предварительно перенумеровать соответствующим образом уравнения, входящие в систему, и сами независимые переменные). Тогда, поскольку мы предполагаем теорему верной для системы из $m - 1$ уравнений, система уравнений

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, m) \tag{4}$$

в некоторой параллелепипедальной окрестности ω_{n+1} точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0)$ определяет $m - 1$ переменных $y_2, y_3, \ldots, y_m$ как неявные функции от остальных $n + 1$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1$:

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1) \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \tag{5}$$

так что тождественно (относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1$) имеем в окрестности ω_{n+1}:

$$F_k[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, y_1)] \equiv 0. \tag{6}$$

Функции φ_k непрерывны и имеют в той же окрестности непрерывные частные производные; кроме того,

$$\varphi_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0) = y_k^0 \quad (k = 2, 3, \ldots, m). \tag{7}$$

Теперь заметим, что, поскольку мы далее ограничиваемся только теми значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1$, которые определяют точки, принадлежащие окрестности ω_{n+1}, система уравнений (5) равносильна системе уравнений (4) в пределах окрестности ω_{n+1} (им удовлетворяют одни и те же системы значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$). Подставляя функции φ_k вместо y_k ($k = 2, 3, \ldots, m$) в уравнение $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$ — единственное, которому осталось еще удовлетворить, получим уравнение:

$$F_1[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1)] = 0,$$

или (вводя новое обозначение для левой части уравнения)

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1) = 0. \tag{8}$$

В пределах окрестности ω_{n+1} система уравнений (1) равносильна системе из уравнений (8) и (5). Отсюда следует, что теорема для системы m уравнений будет доказана, если мы докажем, что уравнение (8) в некоторой окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ определяет переменную y_1 как неявную функцию от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принимающую значение y_1^0 в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и имеющую непрерывные частные производные.

Непосредственно из свойств функций F_1 и φ_k ($k = 2, 3, \ldots, m$) следует, что функция $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1)$ в окрестности ω_{n+1} имеет непрерывные частные производные по всем аргументам (§ 45). В точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0)$ функция Φ обращается в нуль. Действительно, в силу (7) и условия 2) доказываемой теоремы, имеем:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0) &= F_1[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \varphi_2(x_1^0, x_2^0, \ldots \\ &\ldots, (x_n^0, y_1^0) \ldots, \varphi_m(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0)] = \\ &= F_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_0^2, \ldots, y_m) = 0.\end{aligned}$$

В то же время $\Phi'_{y_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0) \neq 0$. В самом деле, по формуле полной производной (§ 45) имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}. \tag{9}$$

С другой стороны, так как функция, стоящая в левой части равенства (6), тождественно равна нулю, то и полная производная ее по любому аргументу, в частности по y_1, также равна нулю: $\frac{\partial F_k}{\partial y_1} = 0$, т. е.

$$0 = \frac{\partial F_k}{\partial y_1} + \frac{\partial F_k}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \quad (k = 2, 3, \ldots, m). \tag{10}$$

Умножая обе части равенства (9) на I_1, а части равенства (10) по-

следовательно на I_2, I_3, ..., I_m и затем складывая все полученные таким образом равенства, получим:

$$I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \sum_{k=1}^{m} I_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \sum_{k=1}^{n} I_k \frac{\partial F_k}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \sum_{k=1}^{m} I_k \frac{\partial F_k}{\partial y_m}. \quad (11)$$

Первая сумма, стоящая в правой части равенства (11), согласно (3) равна I, а остальные суммы, фигурирующие в этом равенстве, согласно известному свойству определителей (о сумме произведений всех элементов некоторого столбца данного определителя на алгебраические дополнения соответственных элементов другого столбца этого определителя) равны нулю. Поэтому имеем: $I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = I$, откуда (так как $I_1 \neq 0$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0)$) $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{I}{I_1}$, так что действительно $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \neq 0$ (так как и I отлично от нуля в точке M_0).

Таким образом, функция $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы § 51. Но тогда в некоторой достаточно малой параллелепипедальной окрестности ω_n точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ уравнение (8) определяет переменную y_1 как непрерывную неявную функцию от остальных переменных:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

принимающую в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ значение y_1^0 и имеющую непрерывные частные производные по всем аргументам в ω_n.

Подставляя $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в (5) вместо y_1, получим:

$$y_k = \varphi_k[x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(k = 2, 3, \ldots, m).$$

Функции $y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяют всем условиям, указанным в заключении доказываемой теоремы.

Таким образом, доказано, что если теорема верна для системы из $m - 1$ уравнений, то она верна и для системы из m уравнений, а так как для системы, состоящей из одного уравнения, теорема верна (это теорема предыдущего параграфа), то она верна и для системы из любого числа уравнений.

§ 53. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы укажем некоторые правила практического вычисления производных и частных производных от неявных функций.

1. Производная неявной функции. Пусть сначала дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $F(x, y)$ есть функция переменных x и y, удовлетворяющая всем условиям теоремы § 50. Тогда это уравнение в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 определяет неявно функцию $y = f(x)$, которая в упомянутой окрестности имеет непрерывную производную. Укажем некоторые способы вычисления производной данной неявной функции.

Если из уравнения (1) удастся выразить (в конечном виде) функцию y через элементарные функции, то ее производная может быть вычислена по известным формулам дифференцирования элементарных функций. Но, как мы знаем, не всякое уравнение, которым определяется неявная функция, может быть решено (в классе элементарных функций) относительно этой функции. В таком случае производная неявной функции может быть выражена в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ через частные производные функции $F(x, y)$ по формуле:

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \tag{2}$$

установленной в ходе доказательства теоремы в § 50.

Эту же производную часто находят и иначе, не обращаясь к готовой формуле (2). Если в левую часть уравнения (1) вместо y подставить функцию $f(x)$, то $F(x, y)$ обратится в сложную функцию от x (входящего в $F(x, y)$ и непосредственно и через посредство y), тождественно равную нулю на рассматриваемом промежутке, так что $F[x, f(x)] \equiv 0$ при всех x, при которых определена неявная функция $f(x)$. Но тогда и производная функции $F[x, f(x)]$ по x будет также тождественно равна нулю:

$$\frac{dF[x, f(x)]}{dx} = 0. \tag{3}$$

Поскольку, по условию, функция $F(x, y)$ обладает непрерывными частными производными в R и $y = f(x)$ имеет производную по x в соответствующем промежутке, то по формуле полной производной (§ 45) имеем:

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Согласно равенству (3) получаем тождество:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Переход от уравнения (1) к тождеству (4) кратко называют *дифференцированием уравнения* (1) *по аргументу* x. Замечая, что $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$, находим из (4):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Мы снова пришли к формуле (2). Таким образом, мы можем вычислять производную неявной функции непосредственно через дифференцирование обеих частей равенства (1), переходя к (4) и находя из последнего $y' = \frac{dy}{dx}$.

Выражение, полученное для производной $y' = \frac{dy}{dx}$ по формуле (2), будет зависеть не только от x, но и от y, где под y, однако, следует понимать ту функцию $y = f(x)$, которая определяется уравнением (1). Следовательно, производная y', определяемая по формуле (2), есть сложная функция от независимой переменной x. Для нахождения значения этой производной при данном значении аргумента x нужно, вообще говоря, знать и значение самой функции y при этом значении x.

Предполагая, что функция $F(x, y)$ имеет в некоторой области непрерывные частные производные второго порядка, рассмотрим вопрос о вычислении второй производной данной неявной функции.

Согласно (2) производную y' мы можем рассматривать как сложную функцию от x, заданную соотношениями: $y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ и $y = f(x)$. Тогда из теоремы о производной сложной функции (которая здесь применима в силу сделанного предположения относительно $F(x, y)$) следует, что выражение, стоящее здесь в правой части выражения для y' имеет производную по x, а следовательно, существует производная от y' по x, т. е. вторая производная y'' от данной неявной функции. Применяя формулу для полной производной, найдем:

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) y',$$

или

$$y'' = -\frac{F'_y F''_{x^2} - F'_x F''_{xy}}{(F'_y)^2} - \frac{F'_y \cdot F''_{xy} - F'_x F''_{y^2}}{(F'_y)^2} \cdot y'.$$

Заменяя в правой части последнего равенства y' через $-\frac{F'_x}{F'_y}$ и упрощая полученное выражение, окончательно находим:

$$y'' = -\frac{(F'_y)^2 F''_{x^2} - 2F''_{xy} F'_x F'_y + (F'_x)^2 F''_{y^2}}{(F'_y)^3}. \tag{5}$$

После того как существование второй производной установлено, вычисление ее можно проще произвести путем дифференцирования тождества (4) по x. Выполняя это дифференцирование и помня, что y и y' являются функциями от x, обращающими равенство (4) в тождество, получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'\right) y' + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0.$$

Остается подставить сюда вместо y' его выражение из (2) и затем из полученного выражения найти y''.

Предполагая, далее, непрерывность частных производных третьего порядка функции $F(x, y)$, мы аналогично предыдущему докажем существование, а затем и найдем выражение третьей производной рассматриваемой неявной функции и т. д. Во всех этих вычислениях существенную роль играет условие $F'_y \neq 0$, т. е. необращение в нуль частной производной функции $F(x, y)$ по той переменной, которая определяется как неявная функция.

Пусть теперь имеем систему m уравнений с $m + 1$ неизвестными $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$:

$$F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \tag{6}$$

где F_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ есть известные функции, удовлетворяющие в некотором параллелепипеде R всем условиям теоремы § 52. Тогда эта система в некоторой окрестности точки x определяет m функций $y_k = f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ одной независимой переменной x, которые имеют непрерывные производные. Найдем эти производные. Для этого представим себе, что выражения для функций y_k подставлены в функции $F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$; тогда все эти функции обратятся в сложные функции одной переменной x, тождественно равные нулю. Следовательно, и все производные от $F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, взятые по x, будут также равны нулю. Составляя эти производные (как производные сложной функции) и приравнивая их нулю, или, как говорят, дифференцируя уравнения (6) по x, получим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных y'_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x} + \frac{\partial F_k}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial F_k}{\partial y_2} y'_2 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} y'_m = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Определитель этой системы есть якобиан $I = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$,

отличный от нуля (см. условия 2 теоремы § 52), поэтому искомые производные y_k' могут быть определены из системы (7):

$$y_1' = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x, y_2, \ldots, y_m)}}{I}, \ldots, y_m' = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x)}}{I}. \quad (8)$$

В этих выражениях под $y_1, y_2, \ldots, y_m$ надлежит подразумевать функции от x, определяемые данной системой уравнений (6).

Если функции F_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, то выражения, стоящие в правых частях формул (8), имеют производные по x, следовательно, существуют производные от y_k' по x, т. е. вторые производные y_k''.

Дифференцируя еще раз соотношения (7) по x (по правилу дифференцирования сложной функции), получим систему m линейных уравнений для определения производных y_k'' $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Эта система, как нетрудно проверить, своим определителем имеет отличный от нуля якобиан $I(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и, следовательно, из нее могут быть определены производные y_k'' $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Формулы, выражающие y_k'', имеют довольно сложный вид, и поэтому мы приводить их не будем.

Аналогичным образом могут быть найдены производные любого порядка от $y_k = f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Пример 1. Дано уравнение $e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0$. Выяснить, определяет ли это уравнение в окрестности какой-либо точки одну из переменных как неявную дифференцируемую функцию другой переменной, и если определяет, то найти ее первую производную, а также вторую производную (если она существует).

Р е ш е н и е. Здесь функция $F(x, y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7$ определена на всей плоскости xOy. Частные производные этой функции $F_x' = y \cos x - 3x^2$ и $F_y' = e^y + \sin x$ непрерывны в любой точке (x, y). Далее, например, в точке $(2, 0)$ функция $F(x, y)$ обращается в нуль: $F(2; 0) = 0$, в то время как $F_y'(2, 0) = 1 + \sin 2 \neq 0$ (и $F_x'(2, 0) = -12 \neq 0$). Следовательно, в силу теоремы § 50, в некоторой окрестности точки $x = 2$ данное уравнение определяет y как неявную функцию от x. Из этого уравнения нельзя выразить y через x (и x через y) в конечном виде через элементарные функции. Несмотря на это, мы можем найти производную функции $y(x)$ (и $x(y)$). Вычислим, например, $y'(x)$. Пользуясь формулой (2), находим в соответствующей окрестности точки $(2, 0)$:

$$y'(x) = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{y \cos x - 3x^2}{e^y + \sin x}. \quad (9)$$

Эту же производную можно найти и не прибегая к формуле (2). Дифференцируя исходное уравнение по x, полагая, что y есть функция, определяемая этим уравнением, получим (в некоторой окрестности взятой точки):

$$e^y y' + y' \sin x + y \cos x - 3x^2 = 0, \quad (10)$$

откуда для y' получается то же самое выражение, что и выше.

Теперь установим существование второй производной функции. Для этого найдем:

$$F''_{x^2} = -y\sin x - 6x, \qquad F''_{xy} = \cos x; \qquad F''_{y^2} = e^y.$$

Так как вторые частные производные функции $F(x, y)$ непрерывны в вышеупомянутой окрестности точки (2, 0) (как, впрочем, и в любой точке плоскости xOy), то $y''(x)$ существует. Эту производную можно получить по готовой формуле (5). Однако на практике вычисление производных от неявных функций обычно производят не по готовым формулам, большинство которых громоздки и неудобны для запоминания (см., например, (5)), а непосредственно, путем последовательного дифференцирования уравнений, которыми определяется рассматриваемая неявная функция. Так, здесь $y''(x)$ можно получить из (9), дифференцируя его обе части по x. Но более удобно вычислить $y''(x)$ путем дифференцирования по x тождества (10), помятуя при этом, что y и y' — функции от x:

$$e^y y'^2 + y''e^y + y''\sin x + 2y'\cos x - y\sin x - 6x = 0.$$

Отсюда получаем:

$$y'' = \frac{y\sin x + 6x - 2y'\cos x - y'^2 e^y}{e^y + \sin x}.$$

В правую часть вместо y' здесь можно подставить его выражение из (9).

Пример 2. Показать, что система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^3 - z^3 = 0, \\ x^3 - y^5 + z^2 = 1 \end{cases}$$

в некоторой окрестности точки $x = 1$ определяет переменные y и z как неявные, дважды дифференцируемые функции от x, и найти производные y', y'', z' и z'' в точке $x = 1$ при условии, что $y(1) = 1$, $z(1) = -1$.

Р е ш е н и е. Здесь функции $F_1(x, y, z) = x^2 - 2y^3 - z^3$, $F_2(x, y, z) = x^3 - y^5 + z^2 - 1$ определены во всем пространстве xyz. Частные производные этих функций $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -6y^2$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = -3z^2$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial F_2}{\partial y} = -5y^4$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2z$ непрерывны для всех значений x, y и z. В точке (1, 1, —1) функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ обращаются в нуль: $F(1, 1, -1) = F_2(1, 1, -1) = 0$, в то время как якобиан этих функций по переменным y и z в точке $y = 1$, $z = -1$ отличен от нуля. Действительно,

$$J(y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6y^2 - 3z^2 & \\ -5y^4 & 2z \end{vmatrix}$$

и

$$J(1, -1) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Следовательно, в некоторой окрестности точки $x = 1$ данная система уравнений определяет переменные y и z как неявные функции от x. Вычислим производные этих функций при условии, что $y(1) = 1$, $z(1) = -1$.

Дифференцируя по x уравнения системы (рассматривая их как тождества), находим:

$$\begin{cases} 2x - 6y^2y' - 3z^2z' = 0, \\ 3x^2 - 5y^4y' + 2zz' = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

В полученные тождества подставим данные числовые значения: $x = 1$, $y = 1$ и $z = -1$

$$\begin{cases} 2 - 6y' - 3z' = 0, \\ 3 - 5y' - 2z' = 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно y' и z', найдем следующие для них значения: $y' = \frac{5}{3}$, $z' = -\frac{8}{3}$.

Функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$, как легко убедиться, имеют всюду непрерывные частные производные второго порядка по всем аргументам. Поэтому существуют $y''(x)$ и $z''(x)$. Для отыскания их дифференцируем по x тождества (11), получаем:

$$\begin{cases} 2 - 12yy'^2 - 6y^2y'' - 6z \cdot z'^2 - 3z^2z'' = 0, \\ 6x - 20y^3y'^2 - 5y^4y'' + 2z'^2 + 2zz'' = 0. \end{cases}$$

Полагая здесь $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$, $y' = \frac{5}{3}$, $z' = -\frac{8}{3}$, имеем:

$$\begin{cases} 18y'' + 9z'' = 34, \\ 45y'' + 18z'' = -318. \end{cases}$$

Отсюда находим: $y'' = -42\frac{8}{9}$, $z'' = 89\frac{5}{9}$.

2. Частные производные от неявной функции. Перейдем теперь к задаче дифференцирования неявных функций нескольких переменных. Начнем с неявной функции, заданной одним уравнением. Пусть $z = f(x, y)$ есть неявная функция независимых переменных x и y, определяемая уравнением:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{12}$$

где $F(x, y, z)$ — функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы § 51. Тогда функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, которые могут быть вычислены по формулам 2 § 51:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{13}$$

Эти частные производные легко найти и не прибегая к формулам (13). Будем рассуждать, как и в случае неявной функции одной переменной. Если в уравнении (12) под z будем понимать ту самую неявную функцию $f(x, y)$, которая этим уравнением определяется, то выражение, стоящее в левой части этого уравнения, представит собой сложную функцию (зависящую от x и y непосредственно и через посредство z), которая тождественно равна нулю. Следовательно, ее полные частные производные по аргументам x и y будут также равны нулю, так что, дифференцируя соотношение (10) по x и по y, получим тождества:

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, & (14) \\ F'_y + F'_z \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. & (15) \end{cases}$$

Так как по условию $F'_z \neq 0$, то отсюда можно найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (причем выражения для них будут теми же, что и в формулах (13)). В полученных формулах (13) правые части зависят, вообще говоря, от x, y и z, причем подразумевается, что z есть та функция от x и y, которая определена уравнением (12).

Предполагая существование и непрерывность частных производных второго порядка функции $F(x, y, z)$ по всем аргументам и дифференцируя тождество (14) по x, а тождество (15) по y, мы получим тождества:

$$F''_{x^2} + 2F''_{xz}\frac{\partial z}{\partial x} + F''_{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + F'_z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$F''_{y^2} + 2F''_{yz}\frac{\partial z}{\partial y} + F''_{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + F'_z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

из которых можно вычислить вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Дифференцируя тождество (14) по y при постоянном x или дифференцируя (15) по x при постоянном y, придем к тождеству:

$$F''_{xy} + F''_{xz}\frac{\partial z}{\partial y} + F''_{yz}\frac{\partial z}{\partial x} + F''_{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F'_z\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

из которого можно найти частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема достаточное число раз, то последовательным дифференцированием тождеств (14) и (15) могут быть вычислены частные производные заданного порядка от неявной функции $z(x, y)$.

Частные производные неявной функции в рассматриваемом случае часто удобно вычислять путем последовательного дифференцирования полным образом тождества (12). Первое дифференцирование этого тождества дает:

$$F'_x\,dx + F'_y\,dz + F'_z\,dz = 0.$$

Отсюда находим полный дифференциал функции $z = f(x,y)$:

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}\,dx - \frac{F'_y}{F'_z}\,dy \qquad (16)$$

($F'_z \neq 0$). Коэффициенты при dx и dy в выражении полного дифференциала dz суть частные производные функции z, а потому снова получаем формулы (13). Дифференцируя полным образом тождество (12) второй раз, получим: $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 F + \frac{\partial F}{\partial z}d^2z = 0$. Отсюда найдем:

$$d^2z = -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 F}{F'_z}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства вместо dz его значение из (16), получим:

$$d^2z = Adx^2 + 2Bd\,x\,dy + Cdy^2, \tag{17}$$

где через A, B и C обозначены некоторые функции от x, y и z, выражающиеся рационально через известные функции F'_x, F'_y и F'_z.

С другой стороны, общее выражение для d^2z имеет вид:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{18}$$

Отождествляя выражения (17) и (18) и приравнивая коэффициенты при произвольных величинах dx^2, $dx\,dy$ и dy^2, получим выражения для всех частных производных второго порядка функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Аналогично могут быть вычислены частные производные третьего, четвертого, ... порядков неявной функции $z = f(x, y)$.

Этим приемом удобно пользоваться, когда нужно вычислить сразу все частные производные одного и того же порядка данной функции.

Рассмотренными методами можно вычислить при соответствующих условиях и частные производные любого порядка от неявной функции какого угодно числа переменных, определенной одним уравнением.

Вычисление частных производных от неявных функций нескольких переменных, определенных системой уравнений, также не представляет особых трудностей. Для пояснения этого рассмотрим вычисление частных производных от неявных функций $z = f(x, y)$ и $t = \varphi(x, y)$, заданных системой двух уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, z, t) = 0, \\ \Phi(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где F и Φ — известные функции переменных x, y, z и t, удовлетворяющие в некотором параллелепипеде R всем условиям теоремы § 52.

На левые части уравнений (19) мы можем смотреть как на сложные функции от x и y (входящих в эти части и непосредственно, и через посредство переменных z и t), которые тождественно равны нулю. Следовательно, полные частные производные по x и по y от левых частей уравнений (19) равны нулю. Беря эти производные по x и по y, получим две следующие системы линейных уравнений—первую относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial t}{\partial x}$, а вторую — относительно $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial t}{\partial y}$:

$$\begin{cases} F'_x + F'_z\frac{\partial z}{\partial x} + F'_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_z\frac{\partial z}{\partial x} + \Phi'_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (A) \qquad \begin{cases} F'_y + F'_z\frac{\partial z}{\partial y} + F'_t\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \\ \Phi'_y + \Phi'_z\frac{\partial z}{\partial y} + \Phi'_t\frac{\partial t}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (B)$$

Определитель I_1 системы (A), как и определитель I_2 системы (B), — суть якобиан $I(z, t)$ системы функций из (19), взятый по переменным z, t, и потому (с. 209) $I_1 = I_2 \neq 0$. Поэтому из первой системы могут быть найдены выражения для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial t}{\partial x}$, а из второй — выражения для $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial t}{\partial y}$.

Если функции F и Φ обладают непрерывными частными производными второго порядка, то все вторые частные производные функций z и t, как в этом нетрудно убедиться, существуют. Дифференцируя соотношения (A) и (B) по x и по y, мы получим систему уравнений для определения этих производных и т. д.

Часто на практике производные любого порядка рассматриваемых неявных функций удобно вычислять способом последовательного дифференцирования полным образом уравнений, определяющих эти функции.

Дифференцируя полным образом (19), находим:

$$\begin{cases} F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz + F'_t dt = 0, \\ \Phi'_x dx + \Phi'_y dy + \Phi'_z dz + \Phi'_t dt = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Так как определитель, полученный относительно dz и dt линейной системы, есть снова якобиан $I(z, t) \neq 0$, то из этой системы можно найти выражение для дифференциалов dz и dt. Коэффициенты при dx и dy в выражении дифференциала dz (dt) будут соответственно частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right.$ и $\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right)$.

Для определения частных производных второго порядка дифференцируем, далее, полным образом соотношения (20)*) и получаем систему двух уравнений, из которых определим d^2z и d^2t. Отождествляя найденные таким образом выражения для d^2z и d^2t с их общими выражениями

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z, \quad d^2t = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 t,$$

мы найдем выражения для вторых частных производных функций z и t.

Продолжая последовательно дифференцировать полным образом тождества (19), мы можем найти частные производные функций z и t любого порядка лишь бы выполнялись соответствующие условия непрерывности частных производных функции F и Φ.

Этот способ особенно удобен, когда требуется вычислить дифференциал неявной функции.

---

*) В предположении, что F и Φ имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Пример 3. Дано уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{21}$$

Исследовать, определяет ли это уравнение в какой-либо области, например, переменную z как неявную функцию переменных x и y, и если определяет, то найти z'_x, z'_y, z''_{x^2}, z''_{xy} и z''_{y^2}.

Р е ш е н и е. Функция $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ определена при всех значениях x, y и z. Частные производные этой функции $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -2z$ непрерывны в любой точке (x, y, z). Далее, например, в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ функция $F(x, y, z)$ обращается в нуль: $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 0$, тогда как $F'_z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = -2 \neq 0$. Следовательно, в силу теоремы § 51 в некоторой окрестности точки $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ рассматриваемое уравнение определяет переменную z как дифференцируемую функцию от x и y: $z = f(x, y)$. Частные производные этой функции мы можем найти несколькими способами.

Первый способ. Пользуясь формулами (13), находим (по сокращении на 2):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}. \tag{22}$$

Так как функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то функция $z = z(x, y)$ имеет вторые частные производные. Поэтому выражения, стоящие в правых частях равенства (22), могут быть продифференцированы по x и по y. Выполняя дифференцирование и пользуясь (22) и (21), найдем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = \frac{z - x\dfrac{x}{z}}{z^2} = \frac{z^2 - x^2}{z^3} = \frac{y^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z - y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = \frac{x^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}.$$

Второй способ. Дифференцируя тождество (21) по x и по y, получим (по сокращении на 2):

$$\begin{cases} x - z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ y - z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{23}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}. \tag{24}$$

Дифференцируя первое тождество по x и второе тождество по y, будем иметь:

$$1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad 1 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

откуда, используя (24) и (21), находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{z} = \frac{1-\frac{x^2}{z^2}}{z} = \frac{y^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{z} = \frac{1-\frac{y^2}{z^2}}{z} = \frac{x^2}{z^3}.$$

Для определения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ дифференцируем либо первое тождество (23) по y, либо второе тождество (23) по x:

$$-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}{z} = -\frac{xy}{z^3}.$$

Третий способ. Дифференцируя полным образом (21) (по сокращении на 2), получим $x\,dx + y\,dy - z\,dz = 0$, или $dz = \frac{x}{z}\,dx + \frac{y}{z}\,dy$, так что $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$.

Дифференцируя полным образом (21) второй раз, имеем:

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 - z\,d^2 z = 0,$$

откуда (если воспользоваться известным уже выражением для dz)

$$d^2 z = \frac{z^2 - x^2}{z^3}\,dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}\,dx\,dy + \frac{z^2 - y^2}{z^3}\,dy^2,$$

или в силу (21)

$$d^2 z = \frac{y^2}{z^3}\,dx^2 - \frac{2xy}{z^3}\,dx\,dy + \frac{x^2}{z^3}\,dy^2,$$

что дает нам:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{z^3}.$$

Если вообще имеется система m уравнений с $m + n$ неизвестными и эта система определяет m переменных как неявные дифференцируемые функции остальных n переменных, то производные этих неявных функций могут быть получены указанными выше способами.

Рассмотренные способы позволяют находить производные (если они существуют) от неявной функции независимо от того, можно ли эту функцию представить в явном виде или нет.

§ 54. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Касательная и нормаль к плоскости кривой, заданной уравнением в неявном виде. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где функция $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные пер-

его порядка в некоторой области определения D. Это уравнение, вообще говоря, определяет на плоскости некоторый геометрический образ (множество всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению).

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ хотя бы одна из производных $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ отлична от нуля, то эта точка называется *обыкновенной* или *правильной точкой* геометрического образа, определяемого уравнением (1). Если же в точке $M_0(x_0, y_0)$ области определения D обращаются одновременно в нуль F'_x и F'_y, т. е. $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$, то эта точка называется *особой* (для рассматриваемого геометрического образа).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — обыкновенная точка; предположим, для определенности, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда по теореме § 50 уравнение (1) в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ определяет неявную дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Следовательно, множество точек плоскости, принадлежащих некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и удовлетворяющих условию (1), есть простая дуга-график функции $y = f(x)$. Всякая прямая, перпендикулярная оси Ox, пересекает такую дугу не более чем в одной точке.

Если множество точек из D, удовлетворяющих уравнению (1), не пусто и не содержит особых точек, то это множество представляется как соединение простых дуг. В этом смысле говорят, что уравнение (1) неявно определяет кривую на плоскости, и уравнение (1) называют *неявным уравнением* этой кривой (или уравнением кривой в неявном виде).

Так как функция $y = f(x)$, определяемая уравнением (1), имеет в обыкновенной точке производную, то кривая, являющаяся графиком этой функции, имеет в обыкновенной точке вполне определенную касательную и определенную нормаль.

Составим уравнение касательной и нормали к данной кривой в обыкновенной точке $M_0(x_0, y_0)$. В этой точке мы имеем:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Следовательно, касательная и нормаль к рассматриваемой кривой в точке M_0 имеют соответственно уравнения:

$$Y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(X - x_0),$$

$$Y - y_0 = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}(X - x_0) \qquad (F'_x(x_0, y_0) \neq 0),$$

где $y_0 = f(x_0)$, а X и Y — текущие координаты точки на касательной или на нормали. Или в более симметричной форме:

$$F'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(Y - y_0) = 0 — \quad (2)$$

уравнение касательной и

$$\frac{X - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} — \quad (3)$$

уравнение нормали.

Пример 1. Найти уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его точке (x_0, y_0), ордината которой отлична от нуля.

Решение. Находим: $F'_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2}$, $F'_y(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2} \neq 0$.

Применяя формулу (2), получим:

$$\frac{2x_0}{a^2}(X - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(Y - y_0) = 0,$$

или

$$b^2(Xx_0 - x_0^2) + a^2(Yy_0 - y_0^2) = 0.$$

Разделив почленно на a^2b^2, будем иметь:

$$\frac{Xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0, \text{ или } \frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Учитывая, что $M_0(x_0, y_0)$ — точка данной кривой (эллипса), окончательно получаем:

$$\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = 1.$$

Это и есть уравнение касательной к эллипсу в его точке (x_0, y_0). Хотя это уравнение было получено при условии $y_0 \neq 0$, оно фактически имеет место и при $y_0 = 0$.

Уравнение нормали к данному эллипсу в точке (x_0, y_0) согласно (3) будет:

$$\frac{a^2(X - x_0)}{x_0} = \frac{b^2(Y - y_0)}{y_0}.$$

2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной уравнением в неявном виде. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4)$$

где функция $F(x, y, z)$ определена и имеет непрерывные частные производные первого порядка в некоторой трехмерной области D.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (4). Если в этой точке хотя бы одна из производных F'_x и F'_y отлична от нуля, то эта точка называется обыкновенной или правильной точкой поверхности, определяемой уравне-

нием (4); в противном случае точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется особой точкой данной поверхности. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — обыкновенная точка поверхности и положим, для определенности, что $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда уравнение (4) (по теореме § 52) определяет в некоторой окрестности обыкновенной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ неявную дифференцируемую функцию $z = f(x, y)$. Следовательно, в некоторой окрестности точки M_0 соответствующий геометрический образ есть простой кусок поверхности*) — график функции $z = f(x, y)$. Если область D не содержит особых точек, то соответствующий геометрический образ, как можно доказать, есть поверхность, составленная из простых кусков. В этом смысле говорят, что уравнение (4) неявно определяет поверхность, и уравнение (4) называют неявным уравнением этой поверхности (или уравнением поверхности в неявном виде).

Составим уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в обыкновенной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. В этой точке мы имеем:

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке M_0 запишется в виде (§ 44):

$$Z - z_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}(X - x_0) - \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}(Y - y_0), \quad (5)$$

или в более симметричной форме:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0. \quad (5')$$

Прямую, перпендикулярную касательной плоскости к данной поверхности и проходящую через точку M_0 касания, называют *нормалью к* этой *поверхности* в точке M_0.

Зная уравнение касательной плоскости (5), нетрудно составить уравнение нормали к поверхности (4). В самом деле, уравнения любой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеют вид:

$$\frac{X - x_0}{m} = \frac{Y - y_0}{n} = \frac{Z - z_0}{p}, \quad (6)$$

где m, n и p — некоторые коэффициенты.

---

*) Простая поверхность есть поверхность, которая может быть задана с помощью параметрических уравнений $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и $z = \chi(u, v)$, где φ, ψ и χ — функции, непрерывные в замкнутой области D (в плоскости uv), ограниченной простой кривой.

Пользуясь условием перпендикулярности прямой (6) и плоскости (5), получаем (в случае, когда ни одна из трех частных производных не обращается в нуль) следующие уравнения нормали:

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (7)$$

В частном случае, когда поверхность задана уравнением в явной форме $z=f(x, y)$, то имеем: $F(x, y, z)=f(x, y)-z$, и уравнения нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ запишутся в виде:

$$\frac{X-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z-z_0}{-1}.$$

Пример 2. Найти касательную плоскость и нормаль к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 \neq 0)$.

Решение. Так как $F'_x(x_0, y_0, z_0) = 2x$, $F'_y(x_0, y_0, z_0) = 2y_0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$, то уравнение касательной плоскости к данной поверхности (сфере) в точке M_0 согласно (5′) есть:

$$x_0(X-x_0)+y_0(Y-y_0)+z_0(Z-z_0)=0,$$

или

$$x_0X+y_0Y+z_0Z=x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Принимая во внимание уравнение сферы, окончательно получим:

$$x_0X+y_0Y+z_0Z=R^2.$$

(Полученное уравнение остается в силе и при $z_0=0$.)

Уравнения нормали к данной сфере в точке M_0 согласно (7) будут:

$$\frac{X-x_0}{x_0} = \frac{Y-y_0}{y_0} = \frac{Z-z_0}{z_0}, \text{ или } \frac{X}{x_0} = \frac{Y}{y_0} = \frac{Z}{z_0}$$

$(x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0,\ z_0 \neq 0)$. Следовательно, нормаль к данной сфере проходит через начало координат.

§ 55. ПРОИЗВОДНАЯ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

В § 42 отмечалось, что частные производные $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ функции $u=f(x, y)$ характеризуют скорость изменения этой функции лишь в (положительном) направлении соответственно оси Ox и оси Oy. Но в ряде приложений математического анализа приходится рассматривать вопрос о быстроте изменения функции $f(x, y)$ при смещении точки (x, y) в произвольном направлении. Решение этого вопроса приводит к понятию производной функции по заданному направлению.

Допустим, что в некоторой области D задана функция двух переменных $u=f(x, y)$. Возьмем в D точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем через нее любую прямую l. Придадим этой прямой определенное направление (рис. 21). Пусть $M(x, y)$ — какая-либо другая точка из D, лежащая на l и выбранная так, что отрезок ее M_0M целиком

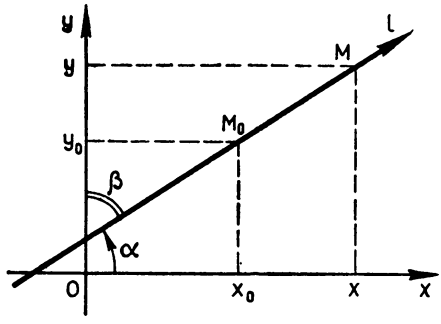


Рис. 21

принадлежит D*). Рассмотрим значения $f(M_0)$ и $f(M)$ функции $f(x, y)$ в точках M_0 и M. Разность $f(M) - f(M_0)$ назовем приращением функции $f(x, y)$ (при переходе из точки M_0 в точку M) по данному направлению l и обозначим ее через $\Delta_l f$, т. е. $\Delta_l f = f(M) - f(M_0)$. Составим отношение:

$$\frac{\Delta_l f}{M_0M} = \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}, \qquad (1)$$

где M_0M — длина отрезка, взятая со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с направлением прямой l, и со знаком минус — в противном случае. Отношение (1) называют средней скоростью изменения функции $u = f(x, y)$ при переходе из точки M_0 в точку M по направлению l, или, как говорят, вдоль прямой l.

Пусть точка M неограниченно приближается к точке M_0 вдоль прямой l. Тогда *если существует предел*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\Delta_l f}{M_0M} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M},$$

то он называется производной в точке M_0 *от функции* $f(x, y) = f(M)$ *по данному направлению* l и обозначается через $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$, или $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$, или $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Эту производную естественно рассматривать как скорость изменения функции в данной точке M_0 по направлению прямой l. При этом считаем, что абсолютная величина производной $\frac{\partial f}{\partial l}$ определяет величину скорости, а знак производной — характер изменения функции $f(x, y)$ (если $\frac{\partial f}{\partial l} > 0$ — функция $f(x, y)$, очевидно, возрастает в направлении l, если же $\frac{\partial f}{\partial l} < 0$ — убывает в том же направлении).

Читатель легко проверит, что в смысле данного определения частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ функции $f(x, y)$ можно рассматривать как производную по направлению оси Ox, а частную производную

*) Такой отрезок всегда существует: поскольку D —область, то точка M_0 внутренняя для D и некоторая круговая r-окрестность этой точки целиком принадлежит D вместе со всеми своими радиусами.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ — как производную по направлению оси Oy, и, следовательно, производная по направлению является обобщением понятия частной производной.

Укажем достаточные условия существования производной по направлению и способ ее вычисления.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ области D, то она имеет в этой точке производную по любому направлению l, причем*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

где α и β — углы, образованные направлением прямой l соответственно с положительными направлениями осей Ox и Oy (рис. 21)

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда приращение $f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ данной функции можно представить в виде (с. 162):

$$f(M) - f(M_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \varepsilon\rho,$$

где $\rho = M_0M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ и $\varepsilon \to 0$, когда $\rho \to 0$. Отсюда

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot\frac{x - x_0}{\rho} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{y - y_0}{\rho} + \varepsilon.$$

Так как отношения $\frac{x - x_0}{\rho}$ и $\frac{y - y_0}{\rho}$ есть косинусы углов, образуемых направлением прямой l с осями координат $\left(\frac{x - x_0}{\rho} = \cos\alpha;\ \frac{y - y_0}{\rho} = \cos\beta\right)$, то

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta + \varepsilon.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\rho \to 0$ (или, что то же самое, при $M \to M_0$) и учитывая, что углы α и β не зависят от ρ, получим:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

т. е. предел $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$ существует, а значит существует производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ в точке (x_0, y_0), причем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta. \qquad (2)$$

Замечая, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и, следовательно, $\cos\beta = \sin\alpha$, мы можем формулу (2) записать в виде:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (3)$$

Таким образом, для дифференцируемой функции знание обычных частных производных в точке (x_0, y_0) позволяет написать выражение производной по любому заданному направлению в этой точке. В частности, при $\alpha = 0$ получим $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Из формулы (3) видно, что при изменении направления на прямой l на противоположное (при котором α меняется на $\pi + \alpha$) производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ меняет знак, оставаясь неизменной по абсолютной величине.

Совершенно аналогично определяется (и вычисляется) производная по направлению от функции любого числа независимых переменных $u = f(x, y, \ldots, t)$. Так, *производная функции трех переменных* $u = f(x, y, z)$ (*при условии ее дифференцируемости в данной точке*) *по любому направлению* l *существует в этой точке и выражается равенством*:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (4)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы прямой l.

Пример 1. Найти производную функции $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точке $M_0(1, 3)$ в направлении l, параллельном биссектрисе первого координатного угла.

Р е ш е н и е. Находим частные производные данной функции: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$. Значения этих частных производных в точке $M_0(1, 3)$ будут: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \frac{3}{10}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = -\frac{1}{10}$. Учитывая, что направление l образует с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$, находим (по формуле 3): $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{10}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Пример 2. Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке M (0, 0) по любому направлению l.

Р е ш е н и е. Как легко убедиться, данная функция не дифференцируема в точке M (0, 0). Поэтому находить $\frac{\partial u}{\partial l}$ по формуле (4) нельзя. Будем искать $\frac{\partial u}{\partial l}$ непосредственно. Здесь

$$\Delta_l u\,(0,\,0) = \sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\Delta_l u}{M_0M} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{M_0M} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\Delta_l u}{\rho} = 1$, $\quad \frac{\partial u}{\partial l} = 1.$

Этот пример показывает, что дифференцируемость функции есть достаточное, но не необходимое условие существования производной по любому направлению, и даже наличие в некоторой точке производных по всем направлениям не гарантирует дифференцируемость в этой точке (ср. § 45).

При изучении поведения данной функции в некоторой точке представляет интерес вопрос о направлении быстрейшего возрастания этой функции в рассматриваемой точке. Этот вопрос рассмотрим здесь лишь для случая функции $u = f(x, y)$ двух переменных.

Введем в рассмотрение вектор, началом которого служит точка $M_0(x_0, y_0)$, а проекциями на оси координат служат значения соответствующих частных производных $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ функции $f(x, y)$. Этот вектор называется *градиентом функции* $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается через $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ или $(\overrightarrow{\text{grad}}\, u)_{M_0}$, а в произвольной точке (x, y) — через $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y)$ или $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$. Таким образом,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j, \tag{5}$$

где производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ вычисляются в соответствующей точке.

Понятие градиента имеет важное значение в различных областях знания (например, в физике, а также в технике).

Предположим, что функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой области. Тогда в любой точке $M_0(x_0, y_0)$ этой области существует производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ по любому направлению l, определяемая по формуле (2). Эта производная весьма просто выра-

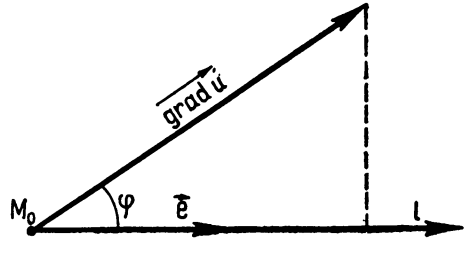


Рис. 22

жается через градиент данной функции. Действительно, рассмотрим единичный вектор $\vec{e}$, имеющий то же направление, что и прямая l. Очевидно, его проекции на оси координат будут $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Следовательно, $\vec{e} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$. Теперь легко видеть, что правая часть формулы (2) представляет собой произведение одноименных компонентов векторов $\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{u}$ и $\vec{e}$, т. е. скалярное произведение этих векторов. Поэтому имеем: $\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{e}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{u}$. Согласно определению скалярного произведения векторов эту формулу можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\vec{e}| \cdot |\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{u}| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{u}$ и $\vec{e}$. Так как $|\vec{e}| = 1$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{u}| \cos\varphi,$$

т. е. *производная по направлению l равна проекции градиента на это направление* (рис. 22).

Из последней формулы видно, что *производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке M_0 имеет наибольшее возможное значение, и притом положительное* (только) *при* $\varphi = 0$, т. е. *когда производная функции и в точке M_0 берется по направлению, определяемому градиентом этой функции в указанной точке.* При этом

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{M_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{M_0}}.$$

Таким образом, модуль градиента дифференцируемой функции равен наибольшему значению $\frac{\partial u}{\partial l}$, т. е. наибольшей скорости изменения функции u в данной точке M_0, а направление градиента данной функции в рассматриваемой точке совпадает с тем, для которого это наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial l}$ достигается. Ясно, что направление, противоположное градиенту, является направлением наиболее быстрого убывания функции.

ГЛАВА IX.

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как и в случае функции одной переменной, одним из наиболее прикладных разделов дифференциального исчисления функций нескольких переменных является теория экстремумов.

§ 56. ПОНЯТИЕ МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(x, y, \ldots, t)$ от нескольких независимых переменных $x, y, \ldots, t$ определена в некоторой области (или замкнутой области) D и $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ есть внутренняя точка этой области. Тогда по аналогии с соответствующим определением для функции одной переменной введем следующее определение:

Говорят, что функция $f(x, y, \ldots, t)$ *имеет максимум (минимум) в точке* $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, *если существует такая окрестность* $(x_0 - \eta, x_0 + \eta; y_0 - \eta, y_0 + \eta; \ldots; t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ *этой точки, что значение данной функции в точке* $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ *будет не меньше (не больше) значения этой функции в любой другой точке* $(x, y, \ldots, t)$ *из взятой окрестности, т. е.*

$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \geqslant f(x, y, \ldots, t), \text{ или}$$
$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) - f(x, y, \ldots, t) \geqslant 0, \text{ в случае максимума и} \quad (1)$$
$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \leqslant f(x, y, \ldots, t), \text{ или}$$
$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) - f(x, y, \ldots, t) \leqslant 0, \text{ — в случае минимума.} \quad (1')$$

Другими словами, *функция* $f(x, y, \ldots, t)$ *имеет в точке* $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ *максимум (минимум), если можно найти такое число* η, *что для всех значений* $h, k, \ldots, l$, *удовлетворяющих условиям:* $|h| < \eta, |k| < \eta, \ldots, |l| < \eta$ *выполняется соотношение:*

$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \geqslant f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots, t_0 + l), \text{ т. е.}$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots, t_0 + l) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \leqslant 0 \quad (2)$$

в случае максимума и

$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \leqslant f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots, t_0 + l), \text{ т. е.}$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots, t_0 + l) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \geqslant 0 \quad (2')$$

— в случае минимума.

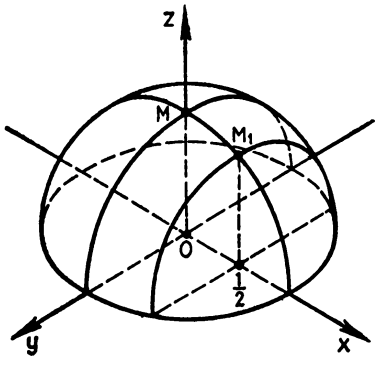


Рис. 23

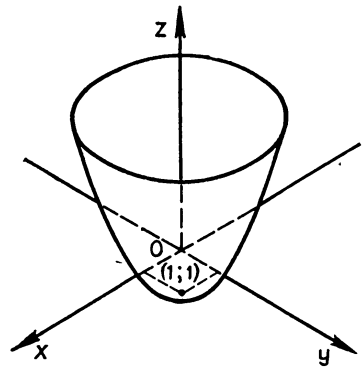


Рис. 24

При этом число $f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ называют *максимумом* или *максимальным значением* (*минимумом или минимальным значением*) *функции* и обозначают: $f_{\max}(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ ($f_{\min}(x_0, y_0, \ldots, t_0)$).

Различают два вида максимума (минимума): строгого и нестрогого. Если в соотношениях (1) и (1′) (соответственно (2) и (2′)) выполняются только строгие неравенства*), то максимум (минимум) называется *строгим*, в противном случае он называется *нестрогим*. В последнем случае в любой окрестности точки $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ найдутся такие точки $(x, y, \ldots, t)$, отличные от точки $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, что $f(x, y, \ldots, t) = f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$.

Пример 1. Функция $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (рис. 23) в точке (0, 0) имеет максимум (строгий), так как здесь, например, при $\eta = \frac{1}{2}$ для $0 < |h| < \eta$, $0 < |k| < \eta$ выполняется строгое неравенство: $f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) = \sqrt{1 - h^2 - k^2} - 1 < 0$. Максимум данной функции равен 1: $f_{\max}(0, 0) = 1$.

Пример 2. Функция $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ (рис. 24) в точке (1, 1) имеет минимум (строгий), так как для всякой точки (x, y), отличной от точки (1, 1), здесь выполняется строгое неравенство: $f(x, y) - f(1, 1) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 0 > 0$. В качестве η здесь может быть взято любое положительное число. Минимум данной функции равен нулю: $f_{\min}(1, 1) = 0$.

Пример 3. Функция $f(x, y) = (x + y)^2$ в точках прямой $x + y = 0$ имеет минимум (нестрогий), потому что во всякой точке этой прямой выполняется условие: $f(x, y) - f(x, -x) = (x + y)^2 - 0 = (x + y)^2 \geqslant 0$**).

Легко также убедиться, что функция $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ в точках окружностей $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k—любое целое неотрицательное число имеет максимум (нестрогий), а в точках окружностей $x^2 + y^2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое натуральное число, имеет минимум (нестрогий).

---

*) С оговоркой, что при этом точка $(x, y, \ldots, t)$ отлична от точки $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ или соответственно, что точка $(h, k, \ldots, l)$ отлична от нулевой.

**) Кроме того, в любой окрестности точки $(x, -x)$ всегда имеется еще точка прямой $x + y = 0$, для которой подсчитанная разность $(x + y)^2$ будет равна нулю.

Заметим, что максимум или минимум функции в точке не является непременно соответственно наибольшим или наименьшим значением функции во всей области ее определения; максимум (минимум) функции в данной точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ есть наибольшее (наименьшее) значение этой функции, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности этой точки. Поэтому одна и та же функция может в своей области определения иметь несколько максимумов или несколько минимумов; при этом какой-нибудь максимум функции может оказаться меньше какого-нибудь минимума (ср. т. I, стр. 356).

Когда нет надобности различать понятия максимального и минимального значения функции нескольких переменных, то ее максимумы и минимумы называются *экстремумами* или *экстремальными значениями*.

Точки, в которых функция $f(x, y, \ldots, t)$ достигает максимума или минимума (имеет экстремум), называются соответственно *точками максимума* или *минимума* (*экстремума*) функции.

Пользуясь термином «экстремум функции», можно сказать, что функция $f(x, y, \ldots, t)$ имеет в точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ экстремум, если существует такое число $\eta > 0$, что для всех значений $h, k, \ldots, l$, для которых $|h| < \eta, |k| < \eta, \ldots, |l| < \eta$ разность $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots, t_0 + l) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ сохраняет один и тот же знак (когда $h, k, \ldots, l$ одновременно не равны нулю).

В соответствии со сказанным выше различают строгий и нестрогий экстремум.

Рассмотрим вопрос о разыскании точек экстремума данной функции.

§ 57. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА

Необходимые условия существования экстремума функции нескольких переменных выражаются следующей теоремой.

Теорема. *Если функция $f(x, y, \ldots, t)$, заданная в некоторой области D, имеет экстремум в какой-либо ее точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, то все частные производные первого порядка данной функции в этой точке (если они существуют) необходимо равны нулю, т. е.*

$$f'_x(x_0, y_0, \ldots, t_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, \ldots, t_0) = 0, \ldots, \quad f'_t(x_0, y_0, \ldots, t_0) = 0.$$

Доказательство. Действительно, пусть функция $f(x, y, \ldots, t)$ в точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ имеет экстремум, например максимум. Тогда существует такое положительное число η, что для всех значений $h, k, \ldots, l$, удовлетворяющих неравенствам $|h| < \eta$, $|k| < \eta, \ldots, |l| < \eta$, выполняется соотношение:

$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \geqslant f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots, t_0 + l).$$

Оставляя здесь h произвольным, но удовлетворяющим условию $|h| < \eta$, примем $k = 0, \ldots, l = 0$. Будем иметь:

$$f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \geqslant f(x_0 + h, y_0, \ldots, t_0). \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию одной независимой переменной x: $\varphi(x) = f(x, y_0, \ldots, t_0)$. Как вытекает из условия теоремы, эта функция определена в интервале $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, причем, так как $f'_x(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ существует, то существует и $\varphi'_x(x_0)$. Очевидно, $\varphi(x_0) = f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, $\varphi(x_0 + h) = f(x_0 + h, y_0, \ldots, t_0)$, и поэтому соотношение (1) можно переписать в виде:

$$\varphi(x_0) \geqslant \varphi(x_0 + h), \qquad (2)$$

где h — любое число, удовлетворяющее условию $|h| < \eta$. Соотношение (2) показывает, что функция $\varphi(x)$ при $x = x_0$ имеет максимум. Следовательно, ее производная $\varphi'(x)$ при этом значении x необходимо обращается в нуль: $\varphi'(x_0) = 0$ или (так как $\varphi(x) = f(x, y_0, \ldots, t_0)$)

$$f'_x(x_0, y_0, \ldots, t_0) = 0.$$

Аналогично доказывается, что и все другие частные производные первого порядка функции $f(x, y, \ldots, t)$ в точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ (если они существуют) необходимо обращаются в нуль:

$$f'_y(x_0, y_0, \ldots, t_0) = 0, \ldots, f'_t(x_0, y_0, \ldots, t_0) = 0.$$

Очевидно, что мы придем к тому же заключению и в случае, когда данная функция $f(x, y, \ldots, t)$ имеет минимум в точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$, имеющей в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) непрерывные частные производные, доказанная теорема имеет простое геометрическое истолкование. Запишем уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ (§ 44):

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0).$$

Если (x_0, y_0) — точка экстремума для $f(x, y)$, то по доказанному $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, так что уравнение касательной плоскости принимает следующий вид: $Z = z_0$ — плоскость, перпендикулярная оси Oz.

Таким образом, если дифференцируемая функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, а соответствующая поверхность $z = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0, z_0) касательную плоскость, то последняя перпендикулярна оси Oz, т. е. параллельна плоскости xOy (или совпадает с ней) (рис. 25).

Доказанная теорема позволяет иногда обнаруживать отсутствие у некоторой функции экстремума в рассматриваемой точке.

Пример 1. Пусть $f(x, y, z) = e^{ax+by+cz}$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.
Здесь для всех x, y и z будем иметь:

$$f'_x(x, y, z) = ae^{ax+by+cz}, \quad f'_y(x, y, z) = be^{ax+by+cz}, \quad f'_z(x, y, z) = ce^{ax+by+cz}.$$

Очевидно, нет никаких таких значений x, y и z, при которых обращались бы в нуль все частные производные данной функции (поскольку $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$). Поэтому эта функция не имеет экстремума.

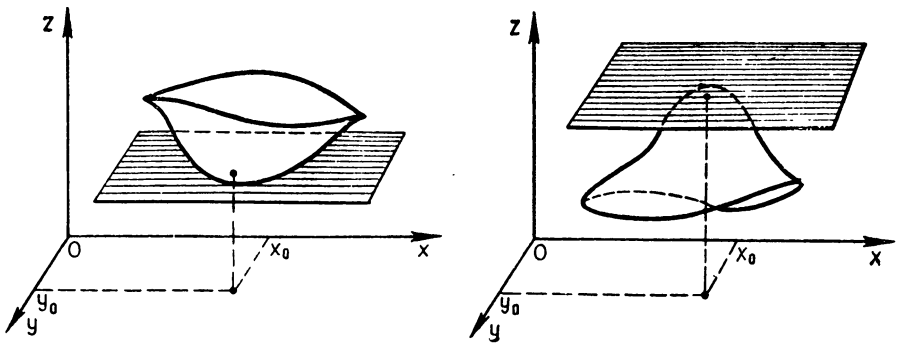


Рис. 25

Замечание. Функция может иметь экстремум и в таких точках, в которых по крайней мере одна из частных производных первого порядка не существует. Так, например, функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (0, 0) не имеет частных производных первого порядка, однако в этой точке данная функция имеет минимум (равный нулю), так как в любой окрестности точки (0, 0) разность $f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt{x^2 + y^2}$ неотрицательна. Точки, в которых все частные производные первого порядка функции равны нулю или хотя бы одна из них не существует (а те, которые существуют, равны нулю), будем называть по аналогии с подобными точками для функций одной независимой переменной точками, *подозрительными на экстремум*.

Таким образом, функция может иметь экстремум только в «подозрительных на экстремум» точках. Обратное утверждение, разумеется, неверно: не во всякой «подозрительной на экстремум» точке функция имеет экстремум. Убедимся в этом на примерах.

Для функции $f(x, y) = xy$ частные производные будут:

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x.$$

В точке (0, 0) эти производные равны нулю, т. е. точка (0, 0) — подозрительная на экстремум точка; однако в этой точке рассматриваемая функция не имеет экстремума, так как нельзя указать такой окрестности точки (0, 0), в которой разность $f(x, y) - f(0, 0) = xy$ была бы неотрицательна (неположительна). Так, например, при $x > 0$ и $y > 0$ эта разность положительна, а, например, при

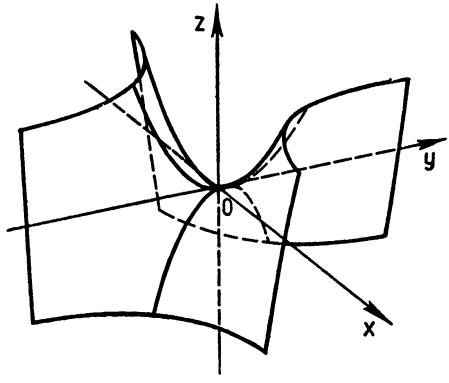


Рис. 26

$x < 0$ и $y > 0$ — отрицательна, как бы малы ни были при этом по абсолютной величине x и y.

Поверхность, выражаемая уравнением $z = xy$ (гиперболический параболоид), вблизи точки (0, 0) располагается частично над, а частично — под плоскостью xOy, являющейся касательной к поверхности (рис. 26).

Для функции $f(x, y) = \sqrt[3]{x + y}$ частные производные первого порядка в точке (0, 0) не существуют.

В самом деле, $\varphi(x) = f(x, 0) = \sqrt[3]{x}$, а потому

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi(0 + \Delta x) - \varphi(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

и $\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ не стремится к конечному пределу при $\Delta x \to 0$, так что $f'_x(x, y)$ действительно не существует в точке (0, 0). Аналогично убедимся, что и $f'_y(x, y)$ не существует в этой точке.

Следовательно, точка (0, 0) «подозрительна на экстремум». Между тем в этой точке данная функция не имеет экстремума, так как в любой окрестности данной точки разность $f(x, y) - f(0; 0) = \sqrt[3]{x + y}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Таким образом, равенство нулю частных производных первого порядка от данной функции в некоторой внутренней точке области, в которой задана функция, или отсутствие этих частных производных в данной точке, являясь необходимым условием наличия экстремума функции в данной точке, не является условием, достаточным для этого.

Перейдем теперь к вопросу о достаточных условиях существования максимума и минимума функции нескольких переменных.

§ 58. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА

Исследование функции нескольких переменных на экстремум в общем случае оказывается довольно сложным по сравнению с аналогичным исследованием для функции от одной переменной. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением достаточных условий максимума и минимума функции только двух независимых переменных. При этом условимся, что в дальнейшем, говоря об экстремуме функции, мы будем подразумевать только строгий экстремум.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные до второго порядка включительно, причем $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, а вторые частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то функция $f(x, y)$ в этой точке:*

1) *при $\Delta > 0$, где $\Delta = f''_{x^2}(x_0, y_0)\, f''_{y^2}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2$ имеет экстремум, именно максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$, и минимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$;*

2) *при* $\Delta < 0$ *не имеет экстремума.*

Доказательство. Так как по условию $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, то точка (x_0, y_0) — подозрительна на экстремум. Будет ли функция $f(x, y)$ иметь в этой точке экстремум или нет, зависит от того, сохраняет ли разность

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

при достаточно малых по абсолютной величине значениях h и k (одновременно не равных нулю) один и тот же знак или нет.

Исследование поведения этой разности удобно производить в том случае, когда она выражена через частные производные данной функции. Имея в виду эту задачу, применим к функции $f(x, y)$ в данной окрестности формулу Тейлора (§ 49) с $n = 2$ (выполнение условий ее применимости очевидно), беря в ней остаточный член в форме Лагранжа:

$$\Delta f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[h^2 f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ 2hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)] \quad (0 < \theta < 1).$$

По условию $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Следовательно,

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}[h^2 f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ k^2 f''(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)].$$

Преобразуем это выражение. Для этого прежде всего рассмотрим значения частных производных второго порядка в самой точке (x_0, y_0), при этом ради краткости записи обозначим:

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{y^2}(x_0, y_0) = C.$$

В силу данной по условию непрерывности в точке (x_0, y_0) частных производных второго порядка можем написать:

$$f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = A + \alpha, \quad f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = B + \beta,$$

$$f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = C + \gamma,$$

где величины α, β и γ стремятся к нулю вместе с h и k, а значит и с $r = \sqrt{h^2 + k^2}$, и выражение для $\Delta f(x_0, y_0)$ может быть записано следующим образом:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2].$$

Обозначим, далее, через φ угол, образуемый вектором, соединяющим точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + h, y_0 + k)$ с положительным направлением оси Ox. Тогда имеем (переходя к полярным координатам): $h = r\cos\varphi$, $k = r\sin\varphi$. В новых переменных выражение Δf примет следующий вид:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{r^2}{2}[A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + \alpha\cos^2\varphi +$$

$$+ 2\beta \sin\varphi \cos\varphi + \gamma \sin^2\varphi],$$

или

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{r^2}{2}[P(\varphi) + \omega(r, \varphi)], \tag{1}$$

где

$$P(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi, \tag{2}$$

$$\omega(r, \varphi) = \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi. \tag{3}$$

Как мы ниже увидим, знак разности Δf (в достаточно малой окрестности точки (r, φ)) зависит главным образом от знака квадратного трехчлена $P(\varphi)$ (если $P(\varphi) \neq 0$). Исследование знака этого трехчлена проведем в связи с рассмотрением его дискриминанта $D = B^2 - AC$ или выражения $\Delta = AC - B^2$.

1. Пусть $\Delta = AC - B^2 > 0$. Предполагая $\sin\varphi \neq 0$, перепишем квадратный трехчлен $P(\varphi)$ в следующем виде: $P(\varphi) = \sin^2\varphi P_1(z)$, где $P_1(z) = Az^2 + Bz + C$, а $z = \operatorname{ctg}\varphi$. Здесь $A \neq 0$ (иначе $\Delta = -B^2 \leqslant 0$, что противоречит условию).

Дискриминант квадратного трехчлена $P_1(z)$ (с действительными коэффициентами) $D = B^2 - AC$ в рассматриваемом случае отрицателен, и потому этот трехчлен при всех действительных значениях z сохраняет один и тот же знак — знак коэффициента A. Тем самым и трехчлен $P(\varphi)$ при всех рассматриваемых значениях φ будет сохранять тот же знак, что и $P_1(z)$, т. е. знак A. То же верно и при $\sin\varphi = 0$, так как тогда $\cos^2\varphi = 1$, и согласно (2) $P(\varphi) = A\cos^2\varphi = A$.

Заметив это, рассмотрим абсолютную величину трехчлена $P(\varphi)$. Это есть положительная непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция. По теореме Вейерштрасса она достигает на этом сегменте наименьшего значения m:

$$|P(\varphi)| \geqslant m > 0 \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi). \tag{4}$$

Теперь обратимся к трехчлену (3). Поскольку $|\sin\varphi| \leqslant 1$ и $|\cos\varphi| \leqslant 1$, имеем:

$$|\omega(r, \varphi)| \leqslant |\alpha| + 2|\beta| + |\gamma|. \tag{*}$$

Так как при $r \to 0$ стремятся к нулю и α, β и γ, то для достаточно малых значений r при любом φ будет выполняться неравенство $|\omega(r, \varphi)| < m$. Сопоставляя его с неравенством (4), заключаем, что при этих значениях r (т. е. в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0)) выражение $P(\varphi) + \omega(r,\varphi)$, а значит, и разность Δf будут иметь тот же знак, что и $P(\varphi)$, т. е. в рассмотренных условиях — знак числа A.

Поэтому, если $A = f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$, то во взятой окрестности точки (x_0, y_0) $\Delta f(x_0, y_0) < 0$, а это согласно определению максимума означает, что функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет максимум;

если же $A = f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$, то и $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ и, значит, функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет минимум.

2. Пусть $\Delta = AC - B^2 < 0$. Предположим сначала, что здесь $A \neq 0$; пусть, ради определенности, $A > 0$. Перепишем трехчлен $P(\varphi)$ в виде:

$$P(\varphi) = \frac{1}{2}[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi].$$

Если теперь положить $\varphi = \varphi_1 = 0$, то значение трехчлена будет равно A: $P(\varphi_1) = A > 0$.

Если же положить $\varphi = \varphi_2$, где φ_2 определяется из условия $\operatorname{ctg}\varphi_2 = -\frac{B}{A}(A \neq 0)$, то окажется, что $A\cos\varphi_2 + B\sin\varphi_2 = 0$, и мы будем иметь: $P(\varphi_2) = \frac{1}{A}(AC - B^2)\sin^2\varphi_2 < 0$ ($A > 0$, а $AC - B^2 < 0$).

Так как в любой окрестности точки (x_0, y_0) существуют как точки, для которых $\varphi = \varphi_1$, так и точки, для которых $\varphi = \varphi_2$ (рис. 27), и, как отмечалось выше, слагаемое $\omega(r, \varphi)$ при достаточно малом r может быть сделано как угодно малым по абсолютной величине, то в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) на лучах $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ знак суммы $P(\varphi) + \omega(r, \varphi)$ будет снова совпадать со знаком $P(\varphi)$, и потому указанная сумма, а с ней и разность $\Delta f(x_0, y_0)$ ни в какой окрестности точки (x_0, y_0) не может сохранять один и тот же знак и, следовательно, в данном случае функция $f(x, y)$ не имеет экстремума в точке (x_0, y_0).

К тому же заключению путем аналогичных рассуждений мы придем и в случае $A < 0$.

Если, наконец, в рассматриваемом случае ($\Delta < 0$) $A = 0$, то трехчлен $P(\varphi)$ принимает вид:

$$P(\varphi) = 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi),$$

причем $B \neq 0$, так как иначе мы имели бы $\Delta = AC - B^2 = 0$, что противоречит условию.

Если взять достаточно малый положительный угол $\varphi = \varphi_1$, то, очевидно, $|C|\sin\varphi_1 < 2|B|\cos\varphi_1$. При таком выборе $\varphi = \varphi_1$ знак выражения $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ будет совпадать со знаком его первого слагаемого $2B\cos\varphi$. Если же мы теперь возьмем $\varphi = \varphi_2 = -\varphi_1$, то знак выражения $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ не изменится, но при этом изменится знак у множителя перед этим выражением, т. е. у $\sin\varphi$.

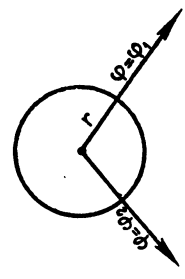


Рис. 27

Таким образом, $P(\varphi_1)$ и $P(\varphi_2)$ имеют противоположные знаки, и снова при достаточно малых значениях r знак выражения $P(\varphi_1) + \omega(r, \varphi_1)$ будет совпадать со знаком числа $P(\varphi_1)$, а знак выражения $P(-\varphi_1) + \omega(r, -\varphi_1)$ — со знаком числа $P(-\varphi_1)$ и, значит, разность $\Delta f(x_0, y_0)$ будет иметь как по-

ложительное, так и отрицательное значения в как угодно малой окрестности точки (x_0, y_0), а следовательно, и в случае $A = 0$ $(\Delta < 0)$ функция $f(x, y)$ не имеет экстремума в точке (x_0, y_0).

В случае, когда $\Delta = 0$, функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) может иметь, а может и не иметь экстремума (в этом смысле случай $\Delta = 0$ иногда называется сомнительным). Например, для функции $f(x, y) = x^4 + y^4$ имеем: $f'_x(x, y) = 4x^3$, $f''_{x^2}(x, y) = 12x^2$, $f''_{y^2} = 12y^2$, $f''_{xy}(x, y) = 0$.

При $x = 0$ и $y = 0$ частные производные первого порядка равны нулю. Следовательно, точка (0, 0) подозрительна на экстремум. В этой точке, как легко видеть, $A = B = C = 0$, а значит, $\Delta = 0$, т. е. имеем сомнительный случай. Но, так как во всякой точке (x, y), отличной от точки (0, 0), выполняется неравенство $\Delta f(0, 0) = x^4 + y^4 > 0$, то данная функция имеет минимум в точке (0, 0).

Для функции же $f(x, y) = x^4 + y^3$ точка (0, 0) также является подозрительной на экстремум и $\Delta = 0$ в этой точке (сомнительный случай), но эта функция не имеет экстремума в точке (0, 0), так как при $x = 0$ имеем: $f(x, y) - f(0, 0) > 0$, если $y > 0$ и $f(x, y) - f(0, 0) < 0$, если $y < 0$.

Теоремы настоящего и предыдущего параграфов приводят нас к следующему п р а в и л у нахождения точек экстремума функции двух независимых переменных.

Чтобы найти точки экстремума данной функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y, следует:

1) найти первые частные производные функции $f(x, y)$ и определить действительные решения системы:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из всех решений взять только те, которые определяют внутренние точки области, в которой задана функция $f(x, y)$;

2) найти все вторые частные производные от данной функции и вычислить их значения для каждого решения $x = x_0$, $y = y_0$ системы (5);

3) составить выражение $\Delta = AC - B^2$ в точке (x_0, y_0).

Если при этом окажется, что $\Delta > 0$, то функция имеет в точке (x_0, y_0) экстремум, а именно максимум, если $A = f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$, и минимум, если $A = f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Если же $\Delta < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума.

З а м е ч а н и е. Отметим, что если $\Delta > 0$, то числа $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$ и $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$ необходимо должны быть одинаковых знаков, так как в противном случае неравенство $\Delta > 0$ невозможно, и потому вместо проверки условий $A < 0$, $A > 0$ можно проверять условия: $C < 0$, $C > 0$.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ $(a \neq 0)$.

Р е ш е н и е. Поступая согласно сформулированному выше правилу, находим первые частные производные данной функции: $f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay$, $f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax$. Эти производные существуют при любых значениях x и y. Составим систему:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0, \\ 3y^2 - 3ax = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем следующие два ее действительных решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = a$, $y_2 = a$.

Находим вторые производные: $f''_{x^2}(x, y) = 6x$, $f''_{y^2}(x, y) = 6y$, $f''_{xy}(x, y) = -3a$. В точках $(0, 0)$ и (a, a) (как, впрочем, и всюду) эти частные производные непрерывны. Значения указанных производных в точках $(0, 0)$ и (a, a) будут:

$$f''_{x^2}(0, 0) = 0, \quad f''_{y^2}(0, 0) = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = -3a,$$

$$f''_{x^2}(a, a) = 6a, \quad f''_{y^2}(a, a) = 6a, \quad f''_{xy}(a, a) = -3a.$$

Имеем:

$$\Delta_1 = f''_{x^2}(0, 0) f''_{y^2}(0, 0) - f''_{xy}(0, 0) = 0 - 9a^2 < 0,$$

$$\Delta_2 = f''_{x^2}(a, a) f''_{y^2}(a, a) - f''_{xy}(a, a) = 6a \cdot 6a - 9a^2 > 0, \quad (a \neq 0).$$

Отсюда заключаем, что функция $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ не имеет экстремума, а в точке (a, a) имеет экстремум. Характер экстремума в точке (a, a) зависит от знака числа a: если $a > 0$, и, значит $f''_{x^2}(a, a) = f''_{y^2}(a, a) = 6a > 0$, то данная функция в точке (a, a) имеет минимум, причем $f_{\min}(a, a) = -a^3$, если же $a < 0$ и, следовательно $f''_{x^2}(a, a) = 6a < 0$, то $f(x, y)$ имеет в точке (a, a) максимум, причем $f_{\max}(a, a) = -a^3 > 0$.

Применяя правило исследования функции на экстремум, мы оставляем в стороне те подозрительные на экстремум точки, при которых хотя бы одна из первых частных производных функции не существует. Поэтому в общем случае мы должны после исследования по указанному правилу рассмотреть еще и такие исключительные точки.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = (x - 5)\sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е. Эта функция определена при любых значениях x и y. Найдем ее частные производные: $(x^2 + y^2 \neq 0)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{5x^2 + 3y^2 - 10x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{2y(x - 5)}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Обе эти производные не существуют при x и y одновременно равных нулю (и только в этом случае), так что точка $(0, 0)$ подозрительна на экстремум.

Найдем теперь те точки, в которых частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ одновременно обращаются в нуль. Приравнивания нулю эти производные, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 - 10x = 0, \\ y(x - 5) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы удовлетворяется, во-первых, при $y = 0$, а, во-вторых, при $x = 5$. При $y = 0$ из первого уравнения системы находим: $x = 2$ (точка (0, 0) не принадлежит области определения $f'_x(x, y)$. Случай же $x = 5$ новых решений не дает, так как при этом первое уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом, имеем только две подозрительные на экстремум точки: (0, 0) и (2,0). Решать вопрос об экстремуме в точке (0, 0) с помощью теоремы (см. с. 238) мы не можем, так как в этой точке производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ не существуют. Однако непосредственно легко установить, что в точке (0, 0) данная функция имеет максимум. Действительно, если взять $0 < \eta < 5$, то для всех значений h и k, удовлетворяющих условию $0 < |h| < \eta$ и $0 < |k| < \eta$, будет выполняться неравенство:

$$f(0 + h,\ 0 + k) - f(0,\ 0) = (h - 5)\sqrt[3]{h^2 + k^2} < 0.$$

Теперь решим вопрос об экстремуме в точке (2, 0). В любой окрестности этой точки существуют производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Найдем частные производные второго порядка:

$$f''_{x^2}(x\ \ y) = \frac{10x^3 + 18xy^2 + 10x^2 - 30y^2}{9(x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}},$$

$$f''_{y^2}(x,\ y) = \frac{6x^3 - 2xy^2 - 30x^2 + 10y^2}{9(x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}},$$

$$f''_{xy}(x,\ y) = \frac{6y^3 - 2yx^2 + 40xy}{9(x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}}.$$

Очевидно, что вторые частные производные непрерывны в точке (2, 0). Значит, при решении вопроса об экстремуме в рассматриваемой точке можно применить установленное выше правило. Имеем:

$$\Delta = f''_{x^2}(2,\ 0) \cdot f''_{y^2}(2,\ 0) - f''^2_{xy}(2,\ 0) = -\frac{5}{3\sqrt[3]{4}} < 0.$$

Следовательно, функция $f(x, y)$ в точке (2, 0) не имеет экстремума.

§ 59. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Установленное в § 58 правило позволяет нам при указанных там условиях находить экстремумы функции в данной точке, т. е. наибольшее (наименьшее) значение функции в некоторой окрестности этой точки. Но, как и в случае функции одной переменной, это наибольшее (наименьшее) в данной окрестности значение функции не является непременно наибольшим (наименьшим) значением функции во всей ее области определения. На практике же обычно приходится искать не просто тот или иной экстремум функции, а наибольшее (наименьшее) значение этой функции во всей области ее определения.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области D. Тогда по теореме Вейерштрас-

са (§ 41) она имеет в этой области как наибольшее, так и наименьшее значение. Это наибольшее (наименьшее) свое значение функция $f(x, y)$ может принять во внутренней точке области. Тогда в этой точке (§ 57) частные производные первого порядка или не существуют (одна или обе), или обращаются (те, которые существуют) в этой точке в нуль, и, следовательно, это наибольшее (наименьшее) значение внутри области D может достигаться только в подозрительной на экстремум точке. Но может случиться, что наибольшее (наименьшее) значение функция будет иметь в некоторой точке, лежащей на границе (контуре) данной области.

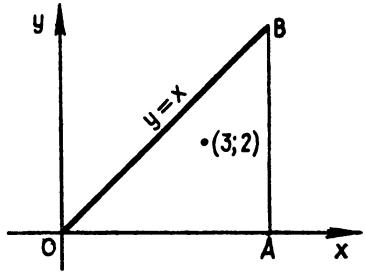


Рис. 28

Таким образом, наибольшее (наименьшее) значение данной функции $f(x, y)$ в области D либо совпадает с одним из ее экстремумов (быть может, и нестрогим*)), либо достигается в некоторой точке, лежащей на границе этой области.

Отсюда, *для того чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на замкнутой области D функции $f(x, y)$ достаточно найти все подозрительные на экстремум точки и, не занимаясь вопросом о том, будет ли в этих точках экстремум, и если будет, то какого рода, вычислить значения функции во всех найденных подозрительных на экстремум точках**), а также найти наибольшее (наименьшее) значение данной функции на границе области***). Наибольшее (наименьшее) из всех этих чисел и будет искомым наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x, y)$ во всей данной области D.*

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2y^2(6 - x - y)$ в замкнутой области D, заданной соотношениями $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 4$.

Решение. Точки плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношениям $0 \leqslant y \leqslant x$, очевидно, расположены не ниже оси Ox и не выше прямой $y = x$, а точки плоскости, абсциссы которых удовлетворяют условию $x \leqslant 4$, расположены не правее прямой $x = 4$. Следовательно, точки плоскости, абсциссы и ординаты которых удовлетворяют одновременно неравенствам $0 \leqslant y \leqslant x$ и $x \leqslant 4$, заполняют прямоугольный треугольник OAB вместе с его границей (рис. 28). Так как в данной замкнутой области D (треугольнике OAB) функция u непрерывна, то она имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Найдем эти значения.

Сначала найдем все подозрительные на экстремум точки для данной функции. Для этого вычислим первые частные производные:

$$u'_x = x^2y^2(18 - 4x - 3y), \quad u'_y = x^3y(12 - 2x - 3y).$$

---

*) Для функции $f(x, y)$, имеющей нестрогий экстремум, мы вопросом о наибольшем и наименьшем ее значениях здесь заниматься не будем.

**) Предполагается, что этих точек конечное число.

***) Большей частью это исследование сводится к исследованию на экстремум некоторой функции одной переменной (см. примеры).

Приравнивая нулю эти производные, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x^2y^2\,(18 - 4x - 3y) = 0, \\ x^3y\,(12 - 2x - 3y) = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы будут: 1) $x_1 = 0$, $y_1 = t$ — любое число; 2) $x_2 = t$ — любое число, $y_2 = 0$; 3) $x_3 = 3$, $y_3 = 2$. Из этих решений только одно $x_3 = 3$, $y_3 = 2$ определяет подозрительную на экстремум точку, лежащую внутри треугольника OAB. Значение функции u в этой точке: $u\,(3,2) = 108$.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D. Здесь эта граница состоит из трех отдельных прямолинейных отрезков: отрезка OA оси Ox, отрезка AB прямой $x = 4$ и отрезка OB прямой $y = x$. Удобно сначала вычислить наибольшее и наименьшее значения функции u на каждом отрезке в отдельности.

а) На отрезке OA: $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$, и потому во всех точках этого отрезка $u = 0$.

б) На отрезке AB: $x = 4$ $(0 \leqslant y \leqslant 4)$, и, значит, функция u принимает в точках отрезка AB вид: $u\,(4, y) = u_1 = 64y^2\,(2 - y)$, т. е. во всех точках этого отрезка u оказывается функцией u_1, зависящей только от одной переменной y, которая изменяется на сегменте $[0, 4]$. Так как на этом сегменте функция u_1 непрерывна, то она имеет на нем как наибольшее, так и наименьшее значения. Это может произойти или в подозрительных на экстремум точках или на концах рассматриваемого сегмента. Определим сначала подозрительные на экстремум точки функции u_1. С этой целью находим: $u_1' = 64\,(4y - 3y^2)$. Приравнивая производную нулю, мы найдем, что подозрительной на экстремум точкой здесь будет только $y = \frac{4}{3}$. В этой точке $u_1\left(\frac{4}{3}\right) = 75\frac{23}{27}$.

На концах сегмента $[0, 4]$ функция u_1 имеет значения $u_1\,(0) = 0$, $u_1\,(4) = -2048$.

Отсюда заключаем, что $75\frac{23}{27}$ — наибольшее значение u_1 на сегменте $[0; 4]$, а -2048 — наименьшее значение u_1 на этом сегменте.

в) На отрезке OB: $y = x$. Следовательно, во всех точках этого отрезка имеем: $u\,(x, x) = u_2 = 2x^5\,(3 - x)$.

Функция u_2 непрерывна на $[0; 4]$, а потому имеет на нем наибольшее и наименьшее значения. Вычислим u_2': $u_2' = 6x^4\,(5 - 2x)$. Отсюда видим, что $x = \frac{5}{2}$ — подозрительная на экстремум точка функции u_2. В этой точке $u_2 = u_2\left(\frac{5}{2}\right) = 97\frac{21}{32}$.

На концах сегмента $[0, 4]$ функция u_2 принимает значения: $u_2\,(0) = 0$, $u_2\,(4) = -2048$. Следовательно, $97\frac{21}{32}$ и -2048 соответственно — наибольшее и наименьшее значения u_2 на сегменте $[0, 4]$.

Согласно общему правилу далее следовало бы найти наибольшее и наименьшее значения функции на всей границе, сопоставляя наибольшее и наименьшее значения функции на рассматриваемых кусках этой границы, однако проще поступить иначе, сразу присоединяя для сравнения к этим наибольшим и наименьшим значениям на кусках границы значения функции в подозрительных на экстремум точках и разыскивая сразу наибольшее и наименьшее значения функции во всей области*).

*) Более того, производя исследование функции на отдельных кусках границы, мы могли бы, не разыскивая наибольших и наименьших ее значений на каждом из этих кусков, сопоставить между собой сразу все составленные для исследования числа (здесь: $u\,(3,2)$, $u\,(x, 0)$, $u_1\left(\frac{4}{3}\right)$, $u_1(0) = u_2\,(0)$, $u_1\,(4) = u_2\,(4)$, $u_2\left(\frac{5}{2}\right)$).

Таким образом, мы должны здесь сопоставить числа: $u\,(3;\,2) = 108$, $u\,(x,\,0) = 0$,

$$u_1\left(\frac{4}{3}\right) = 75\frac{23}{27},\quad u_1\,(0) = 0,\quad u_1\,(4) = -2048,$$

$$u_2\left(\frac{5}{2}\right) = 9\,\frac{21}{32}$$

(значения $u_2\,(0)$ и $u_2\,(4)$ повторяются). Это сопоставление приводит к заключению, что наибольшее значение функции u равно 108 и достигается ею во внутренней точке $(3,2) \in D$, а наименьшее значение равно -2048 и достигается в граничной точке (4,4) этой области.

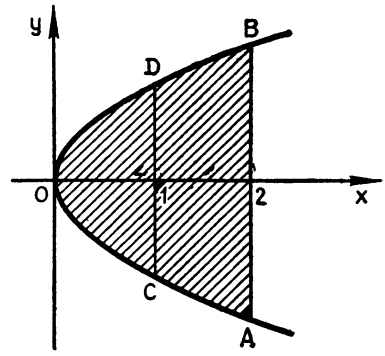


Рис. 29

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-y^2)$ в замкнутой области, определяемой двойным неравенством: $y^2 \leqslant x \leqslant 2$.

Р е ш е н и е. Точки плоскости, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, очевидно, лежат между параболой $y^2 = x$ и прямой $x = 2$, т. е. заполняют параболический сегмент AOB (рис. 29).

Функция u непрерывна в данной замкнутой области, поэтому она имеет в этой области наибольшее и наименьшее значение. Найдем эти значения. Имеем: $u'_x = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(5x - 2y^2 - 3)$; $u'_y = -2(x-1)^{\frac{2}{3}}y$.

Производная u'_x не существует при $x = 1$ и обращается в нуль при $5x - 2y^2 - 3 = 0$ и $x \neq 1$, тогда как производная u'_y обращается в нуль, во-первых, при $x = 1$ и, во-вторых, при $y = 0$; отсюда легко видеть, что подозрительными на экстремум точками для функции u в данной области являются, во-первых, те, в которых $x = 1$, $y^2 \leqslant x$ (хорда CD), и, во-вторых, еще точка $x = \frac{3}{5}$, $y = 0$. Значение функции u во всех точках (x, y) хорды CD равно нулю, а $u\left(\frac{3}{5}, 0\right) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значение функции на границе области определения функции. Сначала исследуем функцию на дуге AOB. На этой линии $y^2 = x$, поэтому во всех точках дуги AOB имеем: $u = 0$.

Наконец, исследуем поведение функции u на хорде AB. Вдоль этой хорды $x = 2$ и, следовательно, в этих точках функция u имеет вид: $u_1 = 2 - y^2$ $(-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2})$. Найдем наибольшее и наименьшее значение этой функции. Имеем: $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -2y$. Отсюда $y = 0$ — подозрительная на экстремум точка функции u_1. Ее значение в этой точке будет: $u_1\,(0) = 2$. На концах сегмента $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$ функция u_1 имеет значения, равные нулю: $u_1(-\sqrt{2}) = u_1(\sqrt{2}) = 0$.

Сравнивая все найденные значения функции u, установим, что наибольшее значение 2 данная функция достигает в точке (2, 0), а наименьшее значение 0 — на хорде CD и на дуге AOB.

Как уже отмечалось, в случае $n > 2$ исследование на экстремум функции n переменных осложняется. То же относится и к иссле-

дованию такой функции на наибольшее (наименьшее) значение. Однако, если для функции, заданной в некоторой области, есть только одна точка, подозрительная на экстремум, то часто бывает непосредственно ясно, что в этой точке функция как раз и имеет наибольшее или наименьшее значение.

Задача. Найти наиболее экономичные размеры прямоугольного бассейна, объем которого должен иметь данное значение V.

Р е ш е н и е. В задаче идет, очевидно, речь о нахождении наименьшего значения поверхности S (открытого сверху) параллелепипеда данного объема V. Обозначим через x, y и z соответственно стороны основания и высоту параллелепипеда, тогда его поверхность S выразится следующим образом: $S = xy + 2xz + 2yz$, причем x, y и z здесь не являются в совокупности независимыми переменными, так как они связаны соотношением: $xyz = V$. Выразив из последнего соотношения, например, z и подставив его значение в выражение для S, мы найдем подлежащую исследованию на наименьшее значение функцию двух независимых переменных x и y:

$$S = S(x, y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y} \quad (x > 0, \ y > 0).$$

Вычислив первые частные производные функции $S(x, y)$:

$$S'_x(x, y) = y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y(x, y) = x - \frac{2V}{y^2},$$

и затем решив систему уравнений $y - \frac{2V}{x^2} = 0$; $x - \frac{2V}{y^2} = 0$, найдем единственную точку $M_0\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$, подозрительную на экстремум.

Так как $S''_{x^2}(x, y) = \frac{4V}{x^3}$, $S''_{xy}(x, y) = 1$, $S''_{y^2}(x, y) = \frac{4V}{y^3}$, то

$$A = S''_{x^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2 = C, \ B = 1 \text{ и } \Delta = AC - B^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке M_0 функция $S(x, y)$ имеет минимум. Поскольку, далее, M_0 — единственная точка, подозрительная на экстремум для $S(x, y)$, и поскольку область D ($x > 0$, $y > 0$) определения этой функции открытая, то $S(x, y)$ имеет в точке M_0 не просто минимум, а наименьшее значение.

Так как при $x^3 = y^3 = 2V$ будем иметь: $z = \frac{V}{xy} = \frac{Vx}{x^3} = \frac{Vx}{2V} = \frac{x}{2}$, то мы заключаем, что наиболее экономичными размерами указанного бассейна являются такие, при которых дно бассейна квадратное (сторона квадрата $x = \sqrt[3]{2V}$), а высота вдвое меньше стороны основания.

§ 60. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Понятие условного экстремума. До сих пор при рассмотрении экстремума функции нескольких переменных мы предполагали, что аргументы функции суть независимые переменные. Однако часто приходится искать экстремум функции, аргументы которой связаны одним или несколькими соотношениями. Пусть, например, требуется из всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь. Тогда, если стороны треугольника обозначить через x, y и z, то его площадь S по формуле Герона выразится так:

$$S = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}, \qquad (1)$$

где величины x, y и z, как стороны треугольника, должны удовлетворять (в том числе и в случае вырождения) условиям:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y \geqslant z,\ y + z \geqslant x,\ x + z \geqslant y. \quad (2)$$

Кроме того, по условию задачи $x + y + z - 2p = 0$. Следовательно, данная задача состоит в исследовании на максимум функции (1) в замкнутой области (2), в предположении, что аргументы этой функции связаны условием $x + y + z - 2p = 0$.

В подобных случаях максимум и минимум называется условным (или несвободным) в отличие от безусловного (или свободного) максимума или минимума, которые может иметь та же функция при произвольном изменении ее аргументов.

Приведем еще такой пример. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (уравнение верхней полусферы, рис. 23), как мы видели (с. 234), имеет в точке (0, 0) безусловный максимум, равный 1; геометрически ему соответствует вершина M сферы. Максимум данной функции, например, при условии $2x - 1 = 0$ (т. е. условный максимум), как нетрудно показать, равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$; он достигается в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, и ему соответствует вершина M_1 полуокружности, получающейся при сечении полусферы плоскостью $x = \frac{1}{2}$ и имеющей в этой плоскости уравнение $y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$. Здесь при отыскании условного экстремума функции свобода изменения ее аргументов ограничивается линией L, являющейся проекцией указанной полуокружности на плоскость xOy, и экстремальное значение выделяется сравнением данного значения функции лишь с теми ее «смежными» значениями, которые соответствуют точкам, лежащим на линии L.

Дадим теперь точное *определение условного максимума (минимума) функции*. Пусть в некоторой области D (или замкнутой области D) задана функция

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad (3)$$

от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые связаны между собой k ($k < n$) соотношениями:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad (4)$$

(так называемыми *уравнениями связи*) и пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — точка области D, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (в случае замкнутой области — внутренняя точка из D).

Тогда *говорят, что в точке* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *функция* (3) *имеет условный максимум (минимум), если существует такая окрестность данной точки* M_0, *что для всех ее точек* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющих уравнениям связи* (4), *выполняется неравенство*: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — *в случае условного максимума и* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — *в случае условного минимума.*

При этом $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называют *значением условного максимума (минимума) функции* (3).

Условные максимумы и минимумы функции также объединяются под общим названием *условных экстремумов*.

Точки, в которых функция (3) имеет условный экстремум (максимум или минимум), называются *точками условного экстремума (максимума или минимума)*.

Можно рассматривать строгие и нестрогие условные экстремумы. Как и при рассмотрении задачи о безусловном экстремуме, мы рассмотрим вопрос только о строгом условном экстремуме.

2. Отыскание условного экстремума. При разыскании условного экстремума можно иногда поступать следующим образом.

Из k уравнений связи (4) (заданных на D), содержащих n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, выразить (если это фактически возможно) каких-нибудь k неизвестных, например $x_1, x_2, \ldots, x_k$, как функции остальных $n - k$ неизвестных $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ и подставить в функцию (3) вместо аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найденные для них выражения. В результате мы получим функцию от $n - k$ переменных: $u_1 = f_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, аргументы которой являются уже независимыми переменными, так как они теперь не связаны никакими соотношениями. Тем самым задача об условном экстремуме функции (3) от n переменных (а также о разыскании ее наибольшего и наименьшего значения) будет сведена к задаче о безусловном экстремуме функции u_1 с $n - k$ независимыми переменными, с решением которой мы уже знакомы.

Задача. Дано положительное число a. Требуется разбить это число на такие n неотрицательных слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим.

Р е ш е н и е. Обозначим искомые слагаемые через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Составим произведение этих чисел: $u = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. По условию задачи имеем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a. \tag{5}$$

Исследуем на максимум функцию u при условии (5). Согласно указанному выше плану выразим из (5) x_n через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и подставим его значение в выражение для u; получим:

$$u_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot (a - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}). \tag{6}$$

Мы имеем здесь функцию от $n - 1$ уже независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в $(n-1)$-мерной замкнутой области, определяемой условиями:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant a, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant x_{n-1} \leqslant a, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqslant a. \tag{7}$$

Нам надо найти те значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в области (7), при которых функция (6) имеет наибольшее значение.

На границе области (7) значение функции (6), очевидно, равно нулю. Найдем, далее, подозрительные на экстремум точки функции (6). Переписав выражение для u_1 в виде:

$$u_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}\,(ax_1 - x_1^2 - \ldots - x_1 x_{n-1}),$$

легко найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 x_3 \ldots x_{n-1} \cdot (a - 2x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}).$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 x_3 \dots x_{n-1}(a - x_1 - 2x_2 - \dots - x_{n-1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = x_1 x_2 \dots x_{n-2}(a - x_1 - x_2 - \dots - 2x_{n-1}).$$

Приравнивая эти частные производные нулю, получим систему $n - 1$ уравнений:

$$\begin{cases} x_2 x_3 \dots x_{n-1}(a - 2x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) = 0, \\ x_1 x_3 \dots x_{n-1}(a - x_1 - 2x_2 - \dots - x_{n-1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 x_2 \dots x_{n-2}(a - x_1 - x_2 - \dots - 2x_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему. Прежде всего, поскольку мы имеем подозрительные на экстремум точки (а таковыми могут быть только внутренние точки области (7)), значения аргументов x_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) не могут быть равными нулю. Следовательно, мы можем поделить на них обе части каждого из уравнений последней системы; тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = a, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + x_{n-1} = a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + 2x_{n-1} = a. \end{cases} \tag{8}$$

Складывая уравнения (8) почленно, находим:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = a - \frac{a}{n}. \tag{9}$$

Далее, из (8) и (9) получаем:

$$x_1 = \frac{a}{n}, \quad x_2 = \frac{a}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{a}{n}.$$

Найденное единственное решение системы (8) определяет внутреннюю точку области (7). Так как на границе области (7) функция u_1 равна нулю, между тем как значение $u_0 = \frac{a}{n}\frac{a}{n} \dots \frac{a}{n}\left(a - \frac{a}{n} - \frac{a}{n} - \dots - \frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)^n > 0$, то в найденной точке функция u_1 имеет не только максимум, но и наибольшее значение. Заметив, что при этом в силу (5) и $x_n = \frac{a}{n}$, мы приходим к выводу, что наибольшего значения произведение u достигает при равенстве всех сомножителей.

Однако разрешение системы (4) относительно каких-либо переменных в большинстве случаев практически затруднительно. В таких случаях указанный путь нахождения экстремума оказывается неэффективным. Укажем другой способ отыскания условного экстремума.

Допустим, что в некоторой точке M_0 ($x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$), координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (4), функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет условный экстремум. Найдем *необходимые условия* этого *экстремума*.

Мы будем решать поставленную задачу в следующих предположениях:

1) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в окрестности рассматриваемой точки имеют непрерывные частные производные по всем аргументам;

2) матрица $\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ в точке M_0 имеет ранг k, т. е. в точке M_0 хотя бы один из определителей k-го порядка, которые могут быть составлены из элементов этой матрицы, отличен от нуля; пусть для определенности это будет якобиан системы функций $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

$$I = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$

При сделанных допущениях относительно функций $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняются все условия теоремы § 52. Поэтому мы можем утверждать, что в некоторой окрестности точки $M_0'(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \ldots, x_n^0)$ система уравнений (4) определяет единственным образом k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ как неявные функции от переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$:

$$x_i = \psi_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{10}$$

причем функции ψ_i имеют непрерывные частные производные по всем аргументам. Тогда $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в указанной окрестности точки M' будет сложной функцией от независимых переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$:

$$u = f[\psi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \psi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, \psi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n]. \tag{11}$$

Так как мы предполагаем, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0 имеет условный экстремум, то функция (11) по замеченному выше будет иметь в этой точке безусловный экстремум. Но в таком случае, как известно (см. § 57), частные производные этой функции по независимым переменным $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ (которые входят в u явно, и через посредство переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$) в точке M_0' равны нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{k+l}} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k). \tag{12}$$

Из (11) по формуле полной производной сложной функции найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{k+l}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}} +$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+l}} = 0 (i = 1, 2, \ldots, n - k).$$

Координаты точки M_0', в которой имеет место условный экстремум, таким образом необходимо удовлетворяют $n - k$ уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+l}} = 0. \quad (13)$$

Для вычисления производных $\frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}}$, ..., $\frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}}$ неизвестных нам функций (10) мы можем составить систему уравнений.

Если мы подставим в (4) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ их выражения через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ (неявные функции (10)), то получим тождества:

$$\varphi_i [\psi_i (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \ldots, \psi_k (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n] = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Дифференцируя эти тождества по переменным $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, получим следующие тождества:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}} + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+l}} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}} + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+l}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}} + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+l}} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Так как все частные производные, входящие в якобиан I, непрерывны в рассматриваемой окрестности точки M_0, то и сам этот якобиан будет в этой окрестности непрерывной функцией (в частности, в точке M_0); и поскольку в этой точке по предположению $I \neq 0$, то в некоторой ее окрестности он также будет отличен от нуля и мы можем из соотношений (14) однозначно выразить частные производные $\frac{\partial x_1}{\partial x_{k+l}}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x_{k+l}}$, ..., $\frac{\partial x_k}{\partial x_{k+l}}$ через частные производные данных функций: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Подставляя эти выражения в соотношения (13), мы получим $n - k$ уравнений, левые части которых будут известными нам функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Присоединяя к этим уравнениям уравнения связи (4), мы получим систему n уравнений. Координаты $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ точки M_0, в которой функция (3) имеет условный экстремум, удовлетворяют этой системе. Поэтому, решив эту систему, мы найдем все точки, в которых функция (3) может иметь условный экстремум.

Таким образом, мы установили лишь необходимые условия условного экстремума в данной точке. Но вопрос о том, будет

ли в той или другой найденной этим путем точке условный экстремум функции (3), и, если будет, то каков характер этого экстремума, еще никак не решается предыдущими рассуждениями и требует дополнительного исследования. Это исследование на достаточные условия сравнительно сложно, и мы здесь приводить его не будем. Однако в большинстве случаев, при решении конкретных задач удается ответить на этот вопрос на основании существа данной задачи. Непосредственно из геометрических или физических соображений часто бывает ясно, что исследуемая (в связи с данной задачей) функция (3) в области своего конкретного задания должна иметь наибольшее (наименьшее) значение и что это значение она получает именно внутри, а не на границе данной области. При этом обычно выясняется (уже в процессе математического решения задачи), что внутри упомянутой области имеется только одно решение системы. Тогда становится очевидным, что именно оно и доставляет функции (3) наибольшее (наименьшее) значение при условиях (4), т. е. условный экстремум.

Практически указанный выше путь исключения неизвестных $\frac{dx_1}{dx_{k+i}}, \frac{dx_2}{dx_{k+i}}, \ldots, \frac{dx_k}{dx_{k+i}}$ из (13) и (14), благодаря асимметрии в отношении аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (часть из них рассматривают как независимые переменные, а часть — как зависимые), оказывается неудобным. (Нередко это вызывает усложнение вычислений.) Поэтому на практике в большинстве случаев получают систему уравнений для определения точек, доставляющих условный экстремум другим, более удобным путем, с помощью так называемого *способа неопределенных множителей Лагранжа*, при котором все аргументы сохраняют одинаковую роль. Изложим суть этого способа.

Каждое из равенств (14), в которых положено: $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ..., $x_n = x_n^0$, умножим соответственно на некоторые, пока неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, и результаты почленно сложим с равенством (13). Мы получим равенство:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right) \frac{dx_1}{dx_{k+i}} +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\right) \frac{dx_2}{dx_{k+i}} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}\right) \frac{dx_k}{dx_{k+i}} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_{k+i}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+i}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+i}} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+i}} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n - k). \qquad (15)$$

Пользуясь тем, что числа λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n - k$) произвольные, выберем их так, чтобы в точке M_0, соответствующей условному экстремуму функции (3), в равенстве (15) суммы, стоящие в скобках,

обратились в нуль, т. е. выберем значения $\lambda_i = \lambda_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ так, чтобы в точке M_0 имели место соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \lambda_2^0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_k^0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{16}$$

Это сделать можно, так как определитель системы, составленной из уравнений (16), по условию отличен от нуля. При выбранных значениях множителей $\lambda = \lambda_i^0$ равенство (15) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{k+i}} + \lambda_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+i}} + \lambda_2^0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+i}} + \ldots + \lambda_k^0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+i}} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n - k). \tag{17}$$

Таким образом, если функция (3), аргументы которой связаны условиями (4), имеет в точке M_0 экстремум, то в этой точке необходимо выполняются равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Учитывая далее, что координаты точки M_0 удовлетворяют и уравнениям связи (4), мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_p} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{cases} \tag{18}$$

относительно $n + k$ неизвестных: n координат точки M_0 и k вспомогательных множителей $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0$.

Итак, при выполнении условий 1) и 2) (с. 252) в каждой точке, в которой функция (3) имеет условный экстремум, удовлетворяются уравнения (18). Решив систему (18), мы, таким образом, найдем все точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которых функция (3) может иметь условный экстремум.

Вопрос о том, является ли найденная по способу Лагранжа точка действительно точкой условного экстремума (и каков характер этого экстремума), обычно может быть решен на основании вспомогательных соображений (см. с. 254).

Для составления n первых уравнений системы (18) можно дать простое искусственное *правило*. Составим вспомогательную функцию

$$v = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_k \varphi_k, \tag{19}$$

где f — исследуемая функция (3); $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — левые части уравнений (4), а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — некоторые неопределенные множители (параметры). Тогда легко видеть, что левые части n первых уравнений системы (18) суть частные производные вспомогательной функции по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, если аргументы функции (3) связаны уравнениями (4), то (в условиях 1 и 2) координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$

возможных точек условного экстремума функции (3) можно найти следующим образом: 1) *составить вспомогательную функцию* v *согласно* (19), *найти все ее первые частные производные по* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и приравнять их нулю*; 2) *к полученным* n *уравнениям присоединить* k *уравнений связи* (4); 3) *из составленной таким образом системы* $n + k$ *уравнений исключить* k *параметров* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *и найти значения неизвестных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— координаты точки, подозрительной на экстремум* (правило множителей Лагранжа).

Применим это правило к решению задачи, сформулированной в начале пункта 1. Именно исследуем на максимум функцию (1) при условии:

$$x + y + z - 2p = 0. \tag{20}$$

Поскольку при постоянном p произведение $S^2 = p(p - x) \times (p - y)(p - z)$ представляет собой непрерывную функцию в замкнутой области (2), то S^2, а с ней и S имеет наибольшее значение, т. е. треугольник с наибольшей площадью существует. На границе области определения (2) функции S, т. е. там, где хотя бы одно из соотношений (2) превращается в равенство, функция S (площадь) повсюду имеет значение нуль. Следовательно, наибольшее значение функция S принимает во внутренней для (2) точке. Так как наибольшее значение S соответствует наибольшему значению S^2 и так как множитель p — постоянная положительная величина, то задача, таким образом, состоит в разыскании внутренней для (2) точки, в которой функция $u = (p - x)(p - y)(p - z)$ достигает наибольшего значения, при условии (20).

Составим вспомогательную функцию:

$$v = (p - x)(p - y)(p - z) + \lambda(x + y + z - 2p).$$

Найдем все ее первые частные производные и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \lambda - (p - y)(p - z) = 0, \\ \lambda - (p - z)(p - x) = 0, \\ \lambda - (p - x)(p - y) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

К этим трем уравнениям присоединим уравнение связи (20). Полученную таким образом систему четырех уравнений (21) и (20) решим совместно относительно x, y и z.

Определяя λ из каждого уравнения (21) и приравнивая друг другу найденные выражения, получим:

$$\lambda = (p - y)(p - z) = (p - x)(p - z) = (p - x)(p - y). \tag{22}$$

По смыслу задачи $0 < x < p$, $0 < y < p$, $0 < z < p$. В этих пределах из (22) находим: $x = y = z$. Приняв еще во внимание уравнение связи (20), получим: $x = y = z = \frac{2p}{3}$. Это единственное решение системы уравнений (21) и (20) определяет внутреннюю точку области (2).

Так как треугольник с наибольшей площадью, как было уже замечено, существует и система уравнений (21) и (20) имеет только одно решение, то оно и доставляет функции u, а следовательно, и функции S максимум*).

Решение показывает, что искомый треугольник равносторонний.

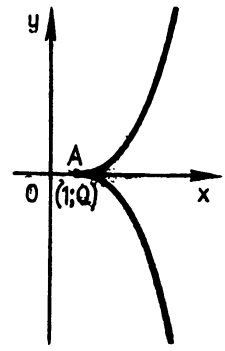


Рис. 30

З а м е ч а н и е. Так как правило Лагранжа было выведено при выполнении условий 1) и 2), то, если не выполняются эти условия, правило Лагранжа может и не дать нам некоторых точек, в которых функция (3) достигает условного экстремума. Убедимся в этом на следующем примере. Пусть требуется найти кратчайшее расстояние от начала координат до точек, лежащих на полукубической параболе $y^2=(x-1)^3$ (рис. 30). Другими словами, требуется найти минимум функции $f(x, y)=x^2+y^2$ при условии: $\varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$. Геометрически очевидно, что функция $f(x, y)=x^2+y^2$ достигает минимума в точке $A(1, 0)$, лежащей на полукубической параболе. Но с помощью правила Лагранжа мы не можем получить этой точки: так как здесь $\varphi'_x(1, 0)=\varphi'_y(1, 0)=0$, то условие 2) (с. 252) не выполняется, и потому мы не можем гарантировать успех в применении этого правила. И в самом деле, если бы мы, не обращая внимания на это, все же попытались воспользоваться этим правилом, то пришли бы к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3\lambda(x-1)=0, \\ 2y-2\lambda y=0, \\ (x-1)^3-y^2=0, \end{cases}$$

которая не определяет точку $A(1, 0)$, так как при $x=1$ первое из этих уравнений не удовлетворяется.

---

*) Следует заметить, что функция S, если не наложить никакого дополнительного условия на аргументы x, y и z, не имеет максимума, так как не существует треугольника с наибольшей площадью при произвольном периметре.

ГЛАВА X.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе мы займемся распространением понятия определенного интеграла на случай функции нескольких (n) переменных, ограничиваясь при этом только частными случаями ($n = 2$ и $n = 3$).

Для функций нескольких переменных вид области интегрирования D усложняется, и для нее у нас еще нет (соответствующего понятию длины отрезка ($n = 1$)) строгого понятия меры — площади фигуры, объема тела: до сих пор (т. 1) мы пользовались лишь наглядными представлениями о площади фигуры и объеме пространственного тела. К введению соответствующих понятий мы и перейдем.

§ 61. КВАДРИРУЕМЫЕ ФИГУРЫ

Чтобы установить понятие площади плоской фигуры вообще, мы будем исходить из понятия площади многоугольника, считая это понятие известным из курса элементарной геометрии. При этом под «многоугольником» мы будем понимать плоскую фигуру, ограниченную одной или несколькими замкнутыми ломаными линиями, которые в совокупности образуют простую кривую (§ 34)*) (рис. 31$а$, $б$).

Будем считать также известным, что выполняются следующие условия: 1) площадь Q любого многоугольника — положительное число; 2) если многоугольник M разбит на два многоугольника M_1 и M_2 без общих внутренних точек, то площадь этого многоугольника M равна сумме площадей многоугольников M_1 и M_2 (свойство аддитивности площади). Из этих условий следует, в частности,

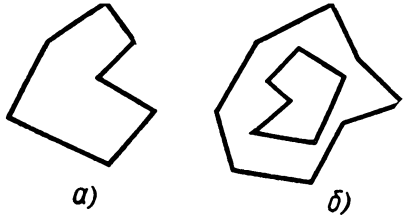


Рис. 31

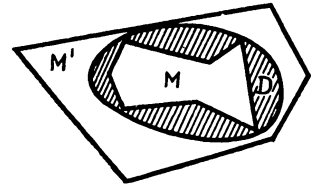


Рис. 32

*) Так что никакие два звена не имеют общих точек, внутренних хотя бы для одного из них, и никакая вершина не принадлежит более чем двум звеньям.

что площадь σ многоугольника M, содержащегося в другом многоугольнике M', не больше площади σ' многоугольника M'.

Обобщая понятие площади многоугольника, мы здесь, не рассматривая понятия площади произвольного точечного двумерного множества, ограничимся введением понятия площади лишь для фигур D, являющихся замкнутыми ограниченными областями на плоскости (§ 35). Граница Γ (см. там же) фигуры D будет при этом мыслиться в виде некоторой простой кривой на плоскости*).

Рассмотрим все многоугольники M, такие, что каждый из них целиком содержится в D ($M \subset D$), а также все такие многоугольники M', каждый из которых содержит D ($M' \supset D$) (рис. 32). Тогда любой из многоугольников M будет содержаться в каждом из многоугольников M', и площадь σ любого из многоугольников M будет не более площади σ' каждого из многоугольников M':

$$\sigma \leqslant \sigma'^{**}). \qquad (*)$$

Зафиксировав здесь какой-либо многоугольник M', мы получим число σ' также фиксированным. Тем самым множество E всех чисел σ — площадей всевозможных многоугольников M — оказывается ограниченным сверху и, значит, имеет верхнюю грань $\underline{S}$; аналогично рассуждая, мы найдем из (*), что множество E' всех чисел σ' имеет нижнюю грань $\overline{S}$. Тогда прежде всего для любого σ из E $\sigma \leqslant \underline{S}$ и для всех σ' из E' $\sigma' \geqslant \overline{S}$. Далее, для всех чисел σ' из E' имеет место неравенство $\underline{S} \leqslant \sigma'$. Действительно, каждое такое σ' есть одно из чисел z, не меньших никакого из чисел σ множества E (см. (*)), в то время как по определению верхней грани множества $\underline{S}$ есть наименьшее из таких чисел z.

Аналогично с помощью того же неравенства (*) устанавливаем, что $\sigma \leqslant \overline{S}$ для всех $\sigma \in E$. Наконец, пользуясь тем, что $\underline{S}$ — верхняя грань множества E, мы из последнего неравенства в свою очередь заключаем: $\underline{S} \leqslant \overline{S}$. Таким образом, для любых $\sigma \in E$ и $\sigma' \in E'$ имеют место неравенства:

$$\sigma \leqslant \underline{S} \leqslant \overline{S} \leqslant \sigma'. \qquad (1)$$

В случае, когда $\underline{S} = \overline{S}$, представляется по интуитивным соображениям естественным принимать за площадь фигуры D именно общее значение этих границ $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Исходя из этого, дадим следующее определение: *если верхняя грань $\underline{S}$ площадей многоугольников M, входящих в данную плоскую фигуру D, равна нижней грани $\overline{S}$ площадей многоугольников M', содержащих D, то говорят, что фигура D квадрируема (т. е. имеет площадь) и за ее площадь принимают число $S = \underline{S} = \overline{S}$.*

*) Такая кривая Γ, как доказывается, разделяет всю плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю.

**) Знак равенства в (*) может фактически возникнуть, если D — многоугольник.

Для квадрируемой фигуры соотношения (1) запишутся так:

$$\sigma \leqslant S \leqslant \sigma'. \tag{2}$$

Легко видеть, что так определенная площадь фигуры, когда эта фигура — многоугольник, будет совпадать с площадью Q, которую мы приписывали этому многоугольнику поначалу (с. 258), так как очевидно, что $\underline{S} = Q$ и $\overline{S} = Q$.

Установим теперь следующий критерий квадрируемости.

Теорема 1. *Для того чтобы плоская фигура D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы по любому положительному числу ε можно было подыскать такие два многоугольника $M \subset D$ и $M' \supset D$, для площадей которых σ и σ' выполняется неравенство:*

$$\sigma' - \sigma < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть D — квадрируемая фигура с площадью $S = \underline{S} = \overline{S}$. В силу свойств верхней и нижней грани множества по числу $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ можно во множестве E найти такое число σ, являющееся площадью некоторого многоугольника M, что $\sigma > S - \frac{\varepsilon}{2}$, а во множестве E' — такое число σ' — площадь некоторого многоугольника M', что $\sigma' < S + \frac{\varepsilon}{2}$. Вычитая почленно из второго неравенства первое, мы и получим требуемое: $\sigma' - \sigma < \varepsilon$. Обратно, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти многоугольники $M \subset D$ и $M' \supset D$ с площадями σ и σ', так чтобы было $\sigma' - \sigma < \varepsilon$, то ввиду соотношений (1) мы получим: $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$. В силу произвольности числа ε отсюда следует (поскольку $\overline{S} \geqslant \underline{S}$), что $\overline{S} = \underline{S}$ — фигура D квадрируема.

Можно дать и такой критерий квадрируемости.

Теорема 2. *Для того чтобы плоская фигура D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности $\{M_n\}$ и $\{M_n'\}$, где M_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — многоугольники, содержащиеся в D, а M_n' — многоугольники, содержащие D, для которых соответствующие последовательности площадей $\{\sigma_n\}$ и $\{\sigma_n'\}$ сходились бы, и притом к одному и тому же числу. При этом площадь фигуры D и будет общим пределом последовательностей $\{\sigma_n\}$ и $\{\sigma_n'\}$.*

Достаточность условия. Пусть существуют последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\sigma_n'\}$, имеющие общий предел σ, тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sigma_n' - \sigma_n) = 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное n, что $\sigma_n' - \sigma_n < \varepsilon$, откуда по теореме 1 и следует квадрируемость фигуры D. При этом для любого n $\sigma_n \leqslant S \leqslant \sigma_n'$, где S —

площадь фигуры D (см. (2)), так что (т. 1, § 29): $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n' = S$.

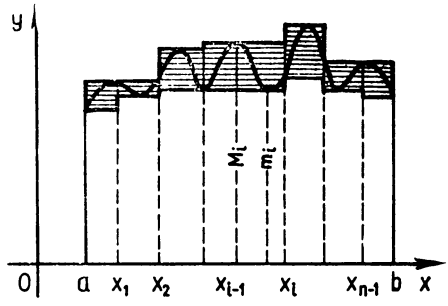


Рис. 33

Необходимость условия. Пусть фигура D квадрируема и имеет площадь S. Зададимся какой-либо сходящейся к нулю последовательностью $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел. По теореме 1 всегда можно найти такие два многоугольника M_n и M_n' с площадями σ_n и σ_n', что $\sigma_n' - \sigma_n < \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но тогда, в силу неравенства (2), и подавно будут выполняться неравенства: $|\sigma_n - S| = S - \sigma_n < \varepsilon_n$, $|\sigma_n' - S| < \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$, то по любому числу $\delta > 0$ можно подыскать такое натуральное число N, что при $n > N$ будет: $\varepsilon_n = |\varepsilon_n| < \delta$, а тогда и подавно для таких n будут выполняться неравенства: $|\sigma_n - S| < \delta$ и $|\sigma_n' - S| < \delta$, т. е. пределы последовательностей $\{\sigma_n\}$ и $\{\sigma_n'\}$ существуют и $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n' = S$.

С введенным определением площади согласуется данное в т. I определение площади криволинейной трапеции (ограниченной сверху дугой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$) как интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Действительно, в силу существования этого интеграла для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое разбиение сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты, что для интегральных сумм s и S*) окажется: $S - s < \varepsilon$. Но s и S геометрически интерпретируются как площади ступенчатых фигур-многоугольников, вписанных в криволинейную трапецию и описанных около нее (рис. 33), и неравенство $S - s < \varepsilon$ означает, что (теорема 1) соответствующая криволинейная трапеция квадрируема, причем площадь Q этой трапеции — верхняя грань для сумм s.

Легко усмотреть из неравенства $S \geqslant I \geqslant s$ (т. I, с. 482), учитывая неравенство $S - s < \varepsilon$, что такой верхней гранью как раз и является число I, т.е. $Q = I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

*) Эти обозначения не имеют отношения к обозначениям которые имеются в теореме 2.

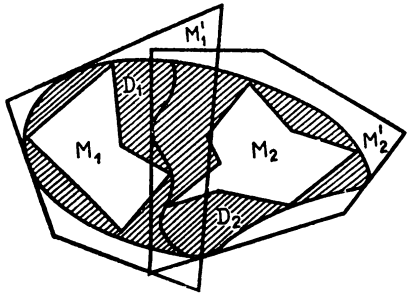


Рис. 34

В обобщение теоремы 2 можно указать и такой критерий квадрируемости фигуры.

Теорема 3. *Если для данной плоской фигуры D можно построить две последовательности квадрируемых фигур $\{K_n\}$ и $\{K_n'\}$ таких, что $K_n \subset D$, $K_n' \supset D$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых соответствующие последовательности площадей $\{Q_n\}$ и $\{Q_n'\}$ имеют один и тот же предел: $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n' = S$, то фигура D квадрируема и площадь ее равна S.*

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем.

Покажем, что для произвольных квадрируемых фигур также имеет место свойство, аналогичное свойству 2 для многоугольников (с. 258).

Теорема 4. (Свойство аддитивности площади.) *Если замкнутая ограниченная плоская область D может быть разбита на две замкнутые квадрируемые области D_1 и D_2 (без общих внутренних точек) с площадями S_1 и S_2, то область D также будет квадрируемой и для площади ее S будет иметь место равенство:* $S = S_1 + S_2$ (рис. 34).

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 — какие-либо многоугольники, содержащиеся соответственно в D_1 и D_2, а σ_1 и σ_2 — их площади; M_1' и M_2' — какие-либо многоугольники, содержащие (соответственно) D_1 и D_2, а σ_1' и σ_2' — площади этих многоугольников. Из многоугольников M_1 и M_2 тогда составляется многоугольная область M, содержащаяся в D, а из M_1' и M_2' — многоугольная область M', содержащая D. Тогда если σ и σ' — площади M и M', то (с. 258) $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \leqslant \sigma' \leqslant \sigma_1' + \sigma_2'$*). Так как фигуры D_1 и D_2 квадрируемы, то для любого $\varepsilon > 0$ можно (теорема 1) выбрать многоугольники M_1 и M_1', M_2 и M_2' так, чтобы было $\sigma_1' - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sigma_2' - \sigma_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $(\sigma_1' + \sigma_2') - (\sigma_1 + \sigma_2) = (\sigma_1' - \sigma_1) + (\sigma_2' - \sigma_2) < \varepsilon$, так что и подавно $\sigma' - \sigma < \varepsilon$ и, значит (теорема 1), фигура D квадрируема. Если ее площадь S, то

$$\sigma \leqslant S \leqslant \sigma' \leqslant \sigma_1' + \sigma_2' \qquad (3)$$

*) Многоугольники M_1' и M_2' могут и перекрываться.

(см. (2)). Но, складывая почленно неравенства $\sigma_1 \leqslant S_1 \leqslant \sigma_1'$ и $\sigma_2 \leqslant S_2 \leqslant \sigma_2'$ (см (2)), получим:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \leqslant S_1 + S_2 \leqslant \sigma_1' + \sigma_2', \tag{4}$$

а так как разность $(\sigma_1' + \sigma_2') - \sigma = (\sigma_1' + \sigma_2') - (\sigma_1 + \sigma_2)$ (см. выше) может быть сделана как угодно малой, то из (3) и (4) следует, что $S = S_1 + S_2$.

В самом деле, если допустить, что $S_1 + S_2 < S$, то, взяв за ε число $S - (S_1 + S_2)$, мы нашли бы из (3), что при соответствующих σ_1, σ_1', σ_2, σ_2' будет: $S - \sigma \leqslant \sigma_1' + \sigma_2' - \sigma < \varepsilon = S - (S_1 + S_2)$, откуда $\sigma > S_1 + S_2$, что противоречит (4). Не может быть и $S_1 + S_2 > S$ (аналогично). Итак, действительно $S = S_1 + S_2$.

Теорема распространяется и на несколько слагаемых.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно было бы доказать, что из квадрируемости D и, например, D_1 вытекает квадрируемость D_2, и отсюда уже будет следовать: $S_2 = S - S_1$. Из сказанного вытекает также, что если квадрируемая фигура D_1 — часть квадрируемой фигуры D, то $S_1 \leqslant S$.

Понятие квадрируемости фигуры тесно связано с понятием кривой меры нуль.

Определение. *Плоская кривая Γ называется кривой меры нуль, если существует многоугольник с произвольно малой площадью, содержащий целиком эту кривую (т. е. содержащий все ее точки)**).

О такой кривой говорят, что она *имеет площадь, равную нулю***).

Докажем, что любая кривая вида $y = f(x)$ (или $x = \varphi(y)$) на данном сегменте $[a, b]$ (соответственно, $[c, d]$), где $f(x)$ ($\varphi(y)$) — н е п р е р ы в н а я на рассматриваемом сегменте функция, есть кривая меры нуль.

Проведем доказательство, например, для функции $f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда, поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, как известно (т. I, § 52), этот сегмент можно разбить на такие частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), что для каждых двух точек x' и x'' любого из них будет выполняться неравенство $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ и, в частности, неравенство: $M_i - m_i = |M_i - m_i| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, где M_i и m_i — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на i-м сегменте ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Если теперь построить на каждом из этих частичных сегментов по два прямоугольника K_i и K_i' соответственно с высотами M_i и m_i, то часть кривой $y = f(x)$, находящаяся над сегментом $[x_{i-1}, x_i]$,

---

*) Т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать многоугольник с площадью, меньшей ε, целиком содержащий эту кривую.

**) Далеко не всякая кривая (даже непрерывная) имеет меру нуль.

покроется целиком прямоугольником со сторонами длины $x_i - x_{i-1}$ и $M_i - m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (см. рис. 33), а вся кривая на $[a, b]$ покроется многоугольной областью, составленной из всех таких прямоугольников. При этом для площади Q полученной многоугольной области будем иметь:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь может быть как угодно мало, то это и означает, что данная кривая имеет меру нуль.

Очевидно, что и всякая кривая, состоящая из конечного числа указанных кривых, также будет иметь меру нуль.

Теорема 5. *Для того чтобы замкнутая ограниченная область (фигура) D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница Γ была кривой меры нуль.*

Доказательство. Необходимость условия. Пусть фигура D квадрируема. Тогда по теореме 1, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существуют такой многоугольник $M \subset D$ и такой многоугольник $M' \supset D$, что для их площадей σ и σ' справедливо неравенство: $\sigma' - \sigma < \varepsilon$. Так как многоугольник M' содержит многоугольник M, то он состоит из двух частей: M и M_1, где M_1 — некоторый многоугольник (находящийся между границами M и M') (рис. 35), и поэтому для площади σ_1 многоугольника M_1 мы имеем: $\sigma_1 = \sigma' - \sigma < \varepsilon$. Между тем очевидно, что любая точка границы Γ фигуры D находится между M и M', т. е. Γ целиком покрывается многоугольником M_1 с площадью, меньшей ε, а это и означает, что Γ — кривая меры нуль.

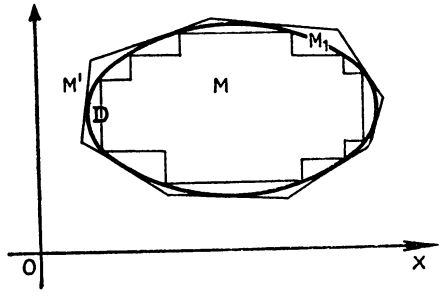


Рис. 35

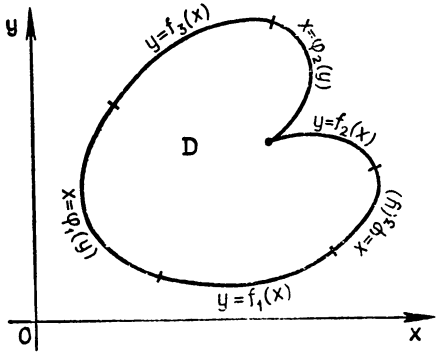


Рис. 36

Достаточность условия. Положим теперь, что граница Γ имеет меру нуль, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ она может быть заключена в многоугольную область M_1 с площадью Q, меньшей чем ε. При этом, в случае надобности, очевидно всегда можно (взяв новую соответствующую

многоугольную область, покрывающую Γ и имеющую меньшую чем M_1 площадь) сделать так, чтобы эта область M_1 не покрывала всей фигуры D. Будем считать, что область M_1 с самого начала такова. Тогда из точек фигуры D, не покрытых областью M_1, очевидно, можно составить также некоторую многоугольную область M (с площадью σ), содержащуюся в D, причем, присоединяя M_1 к M, мы получим некоторую многоугольную область M' (с площадью σ'), уже содержащую D. При этом $\sigma' = \sigma + Q$ и $Q = \sigma' - \sigma$, так что $\sigma' - \sigma < \varepsilon$, а тогда по теореме 1 фигура D квадрируема.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что если плоская фигура D ограничена несколькими непрерывными кривыми вида $y = f(x)$ $(x = \varphi(y))$ на некоторых сегментах (с. 263), то фигура D (рис. 36) квадрируема.

§ 62. КУБИРУЕМЫЕ ТЕЛА

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве дана некоторая замкнутая ограниченная область (тело T), граница которой (поверхность) может быть задана параметрическими уравнениями: $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$; $z = \chi(u, v)$, где точка (u, v) принадлежит некоторой двумерной замкнутой области D, причем каждой точке $(u, v) \in D$ соответствует единственная точка поверхности, функции же $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ непрерывны в D.

Считая известным понятие объема многогранника (многогранной области), мы можем аналогично тому, как это было сделано для площадей фигур, ввести понятие объема тела T, считая тело, имеющим объем (кубируемым) тогда и только тогда, когда нижняя грань $\underline{V}$ объемов многогранников, содержащих T, и верхняя грань $\overline{V}$ объемов многогранников, содержащихся в T, равны между собой: $\underline{V} = \overline{V} = V$; само число V будем называть при этом объемом тела T.

Здесь также будут верны теорема 1 (критерий кубируемости) и теорема 2 (второй критерий кубируемости), аналогичные теоремам 1 и 2 предыдущего параграфа.

В качестве иллюстрации к этим теоремам докажем кубируемость прямого цилиндра, основанием которого служит некоторая квадрируемая замкнутая область D, ограниченная простой замкнутой кривой — направляющей цилиндра.

Так как фигура D квадрируема, то (§ 61, теорема 1) для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такие два многоугольника $M_1 \subset D$ и $M_2 \supset D$ с площадями σ_1 и σ_2, что $S - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2h}$, $\sigma_2 - S < \frac{\varepsilon}{2h}$, где S — площадь фигуры D, а h — высота цилиндра, откуда

$$\sigma_2 - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{h} \text{ и } \sigma_2 h - \sigma_1 h < \varepsilon. \qquad (*)$$

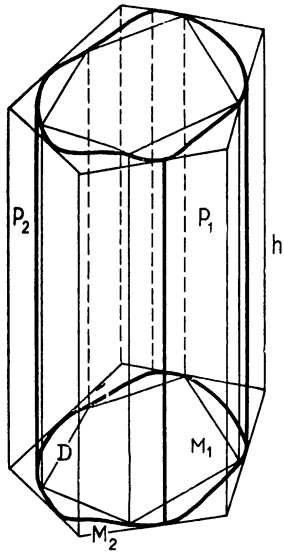


Рис. 37

Здесь произведения $\sigma_1 h$ и $\sigma_2 h$ выражают объемы многогранников — «призм» P_1 и P_2 высоты h, имеющих основаниями соответственно многоугольники M_1 и M_2. Но очевидно (рис. 37), что многогранник P_1 содержится в данном цилиндре, а P_2 содержит его, и поэтому (см. (*)) по критерию кубируемости этот цилиндр имеет некоторый объем V. Найдем этот объем. Из определения объема кубируемого тела следует, что $\sigma_1 h \leqslant V \leqslant \sigma_2 h$. Вместе с тем и $\sigma_1 h \leqslant Sh \leqslant \sigma_2 h$ (поскольку $\sigma_1 \leqslant S \leqslant \sigma_2$). Но $\sigma_2 h - \sigma_1 h < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ может быть как угодно мало, и поэтому из сопоставления полученных соотношений следует (ср. с. 263), что $V = Sh$.

Итак, объем цилиндра указанного вида существует и равен произведению его площади основания на высоту. (Отсюда, между прочим, следует существование объема у тел, рассмотренных на страницах 389—390, т. I.)

Для пространственных фигур (аналогично плоским фигурам) можно ввести понятие границы (поверхности) с мерой (объемом) нуль и доказать теорему, аналогичную теореме 5: *для того чтобы тело T было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы объем его границы (поверхности) был равен нулю.*

К числу поверхностей меры нуль относится, например, поверхность P, задаваемая уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ непрерывная в некоторой квадрируемой замкнутой области D функция (ср. с. 263).

То же относится к поверхностям, заданным уравнениями $y = g(x, z)$ или $x = h(y, z)$, где $g(x, z)$ и $h(y, z)$ — непрерывные в соответствующих ограниченных областях функции, а тогда и к поверхностям, состоящим из конечного числа поверхностей этих трех типов.

Отсюда, в частности, следует кубируемость «цилиндрического тела» — тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, с «боков» — цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, снизу — некоторой замкнутой ограниченной квадрируемой областью D, лежащей в плоскости xOy (ее граница — направляющая упомянутой цилиндрической поверхности), причем $f(x, y)$ — непрерывная, неотрицательная на D функция: поверхность $z = f(x, y)$ и плоская поверхность D имеют меру нуль, цилиндрическая же часть поверхности тела есть часть границы кубируемого тела — прямого цилиндра соответствующей высоты, и ее мера поэтому также равна нулю.

Можно доказать также, что тело, ограниченное гладкой (или кусочно-гладкой) поверхностью*), кубируемо.

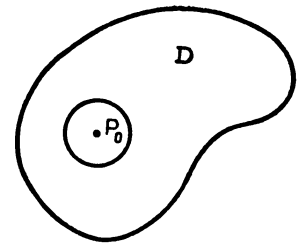


Рис. 38

§ 63. ПОНЯТИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Некоторые задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

а) Задача о массе плоской материальной фигуры. Рассмотрим некоторую материальную плоскую фигуру D. Геометрически мы будем считать эту фигуру D квадрируемой замкнутой ограниченной областью. Поставим перед собой задачу вычисления массы такой фигуры. Если эта фигура однородна , а δ — ее плотность, то вычисление ее массы μ производится непосредственно: $\mu = S \cdot \delta$, где S — площадь фигуры.

Предположим теперь, что данная плоская фигура не является однородной. Дадим тогда определение плотности этой фигуры («пластинки») в данной ее точке. Данную фигуру будем при этом рассматривать в некоторой системе прямоугольных координат.

Возьмем какую-либо точку $P_0\,(x_i, y_i)$ этой фигуры и рассмотрим ее некоторую (говоря нестрого, небольшую по площади) r-окрестность (рис. 38). Отношение массы μ взятой окрестности к ее площади σ мы будем (как это представляется естественным) называть средней плотностью пластинки для точек взятой окрестности. Чем меньше будет при этом диаметр $2r$ взятой окрестности, тем больше оснований у нас будет воспринимать это отношение как плотность пластинки в точке P_0. Отсюда приходим к определению: за плотность δ_0 пластинки в точке $P_0\,(x_0, y_0)$ принимается предел (если он существует), к которому стремится средняя плотность $\frac{\mu}{\sigma}$, когда диаметр $d = 2r$ взятой окрестности стремится к нулю, т. е. $\delta_0 = \lim\limits_{d \to 0} \frac{\mu}{\sigma}$.

Если теперь взятая точка пластинки будет переменной: $P\,(x, y)$, то плотность δ в точке P будет зависеть от ее координат: $\delta = f\,(x, y)$. Такую функцию δ мы будем называть *плотностью пластинки в переменной ее точке* $P\,(x, y)$.

Перейдем теперь к задаче нахождения массы рассматриваемой фигуры по данной функции $\delta = f\,(x, y)$. Разобъем фигуру D на

---

*) Поверхность без самопересечений, заданная параметрическими уравнениями $x = f\,(u, v)$, $y = \varphi\,(u, v)$, $z = \psi\,(u, v)$, где функции f, φ, ψ непрерывны вместе со своими частными производными (первого порядка) в некоторой замкнутой ограниченной области D (в плоскости uv), граница которой — гладкая кривая (§ 34), называется гладкой. Поверхность, состоящая из гладких кусков, называется кусочно-гладкой.

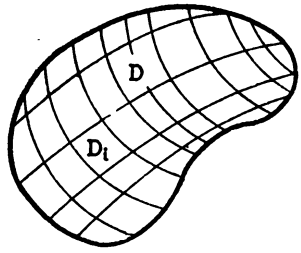


Рис. 39

части D_i, являющиеся какими-либо квадрируемыми фигурами без общих внутренних точек и имеющими площади $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) (рис. 39). Выберем в пределах каждой площадки D_i произвольным образом точку A_i (ξ_i, η_i). Будем считать из наглядных соображений, что при малой площади $\Delta\sigma_i$ значение плотности $\delta_i = f(\xi_i, \eta_i)$ в точке A_i будет мало отличаться от значения этой плотности в других точках той же части D_i, и мы можем приближенно принять за массу части D_i произведение $\delta_i \Delta\sigma_i$, а сумму таких произведений для всех частей D_i: $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \Delta\sigma_i$ — за приближенное выражение массы всей пластинки. При этом (из интуитивных соображений) ясно, что, чем n больше, а размеры каждой части D_i меньше, тем естественнее видеть в μ_n приближенное значение массы пластинки. Логично ожидать поэтому, что предел этой суммы μ_n, найденной при условии, что «размеры» площадок D_i сделаются как угодно малыми, и будет выражать искомую массу пластинки. Мы приходим, таким образом, к следующему определению.

Массой пластинки D называется предел M, к которому стремится сумма μ_n, когда максимум d расстояний d_i между двумя любыми точками каждой из частичных площадок D_i стремится к нулю:

$$M = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ (d \to 0)}} \mu_n = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ (d \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

При этом предполагается, что предел этот существует и не зависит от способа разбиения фигуры D на части D_i и от способа выбора точек A_i в этих частичных областях.

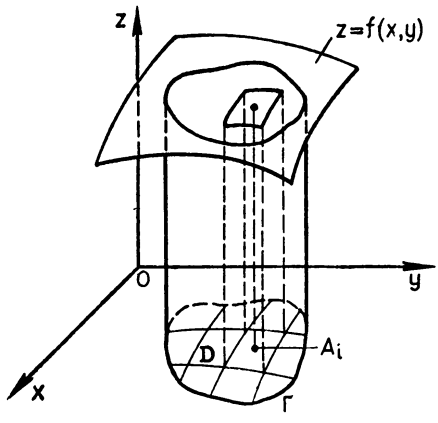


Рис. 40

б) Объем цилиндрического тела. Рассмотрим цилиндрическое тело T, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — непрерывная неотрицательная в области D функция, с боков — некоторой цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, снизу — частью плоскости xOy — замкнутой квадрируемой областью D, контур Γ которой — простая замкнутая кривая (рис. 40). Как было показано выше (с. 266), это тело имеет

объем. Рассмотрим один из способов вычисления этого объема.

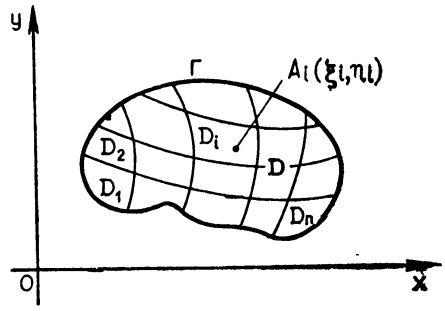


Рис. 41

Разобьем замкнутую область D на n квадрируемых замкнутых ограниченных областей D_1, D_2, ..., D_n (с простыми замкнутыми контурами), имеющих площади $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. В каждой из областей D_i выберем по точке $A_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим произведения вида: $v_i = f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Каждое из таких произведений геометрически представляет собой (с. 266) объем прямого цилиндра с высотой $h_i = f(\xi_i, \eta_i)$ и основанием D_i (см. рис. 37), а сумма

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i$$

— объем «ступенчатого тела», составленного из всех таких цилиндров.

Если теперь стремить число n разбиений к бесконечности, причем так, чтобы d — наибольшая из верхних граней d_i — расстояний двух точек одной и той же области D_i стремились к нулю, то V_n, как представляется очевидным, будет иметь предел, равный объему данного цилиндрического тела:

$$V = \lim_{d\to 0} V_n = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\,\Delta\sigma_i^{*}. \qquad (2)$$

Таким образом, мы видим, что обе рассмотренные нами задачи приводят к пределу сумм одного и того же вида; задача разыскания пределов таких сумм и приводит к понятию двойного интеграла.

2. Понятие двойного интеграла. Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная и ограниченная в некоторой замкнутой квадрируемой области D, граница Γ которой — простая замкнутая кривая; такую замкнутую область мы будем в дальнейшем для краткости обычно называть простой областью.

Разобьем область**) D на n частичных простых областей D_1, D_2, ..., D_n (без общих внутренних точек) с помощью некоторой сети кривых меры нуль (рис. 41). Площади этих областей обозначим соответственно через $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. В пределах каждой частич-

---

*) О точном определении этого предела см. на странице 270.

**) Здесь и часто в дальнейшем, говоря о простой области или вообще о замкнутой области, мы будем для краткости называть ее «областью», считая, что из контекста ясно, в каком смысле употребляется этот термин.

ной области D_i выберем произвольным образом по точке $A_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму:

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i. \qquad (*)$$

Всякую такую сумму мы будем называть *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$, составленной по области D.

Меняя сеть разбиения и способ выбора точек в частичных областях, мы можем составить бесконечно много интегральных сумм, вообще говоря, различных между собой. Будем теперь неограниченно увеличивать число n разбиений области D на частичные области, но так, чтобы d — наибольший из диаметров *) взятых областей D_i стремился при этом к нулю. Может случиться, что тогда интегральная сумма $\sum_n$ будет иметь предел (не зависящий ни от способа разбиения области D на частичные простые области D_i, ни от способа выбора точек (ξ_i, η_i) в этих областях). Точный смысл этого стремления к пределу здесь тот же, что и для случая предела интегральных сумм функции одного переменного (т. I, с. 474).

Этот предел I записывают следующим образом:

$$I = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Кратко I называют также пределом интегральной суммы $\sum_n$. Как и в т. I (§ 94), здесь легко доказать, что такое число I может быть (для данной функции $f(x, y)$ в области D) только одно.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Если при* $d\to 0$ *интегральная сумма* $\sum_n$ *имеет предел, то этот предел называется двойным интегралом от функции* $f(x, y)$, *взятым по области* D, *и обозначается:*

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,d\sigma.$$

Функция $f(x, y)$ при этом называется *интегрируемой в области* D.

Возвращаясь к рассмотренным выше (п. 1) задачам, можем, исходя из приведенного определения, сказать, что в случае интегрируемости в D функции $\delta(x, y)$ (с. 267) масса M материальной фигуры D будет равна двойному интегралу от функции $\delta(x, y)$ по области D:

$$M = \iint_{(D)} \delta(x, y)\,d\sigma. \qquad (3)$$

*) Диаметром ограниченной области (и вообще любого ограниченного точечного множества) называется верхняя грань множества расстояний между двумя любыми точками этой области (этого множества).

Исходя из этого же определения, можем теперь доказать для интегрируемой в D функции $f(x, y)$ соотношение (2): из интегрируемости $f(x, y)$ вытекает, что сумма $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ (п. 1б) имеет (в указанном выше смысле) предел при $d \to 0$, равный двойному интегралу $I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma$. С другой стороны, этим пределом является объем V рассматриваемого цилиндрического тела. Действительно, пусть m_i и M_i — соответственно наименьшее и наибольшее значения непрерывной на области D_i функции $f(x, y)$. Тогда суммы $p_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i$ и $P_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i$ выражают объемы ступенчатых тел T_1 и T_2, состоящих соответственно из цилиндров с высотами m_i и M_i и площадями оснований $\Delta\sigma_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Но T_1 содержится в цилиндрическом теле T, а T_2 его содержит ($m \leqslant f(x, y) \leqslant M$; $(x, y) \in D$) и потому $p_n \leqslant V \leqslant P_n$. Так как $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ (d_i\to 0)}} p_n = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ (d_i\to 0)}} P_n = I$, то отсюда следует, что и $V = I = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$, т. е.

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma. \tag{4}$$

Замечание. Если для функции $f(x, y) = 1$ составить по данной области D интегральную сумму $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i$, то окажется, что $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta\sigma_i = S$ (где S — площадь области D) (рис. 39), но тогда и $\lim\limits_{n\to+\infty} \Sigma_n = S$, или по определению двойного интеграла $S = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{(D)} 1 \cdot d\sigma$, или в условной записи

$$S = \iint\limits_{(D)} d\sigma. \tag{5}$$

§ 64. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Двойной интеграл имеет ряд свойств, аналогичных свойствам определенного интеграла (т. I, § 99).

1. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в данной области D, то, какова бы ни была постоянная C, функция $Cf(x, y)$ также интегрируема в этой области и*

$$\iint\limits_{(D)} Cf(x, y)\, d\sigma = C \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma.$$

2. *Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в данной*

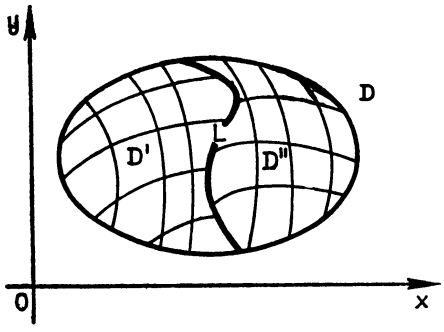


Рис. 42

области D, то их сумма $f_1(x, y)+f_2(x, y)$ также интегрируема в D, причем

$$\iint\limits_{(D)}[f_1(x,\ y)+f_2(x,\ y)]\,d\sigma = \iint\limits_{(D)} f_1(x,\ y)\,d\sigma + \iint\limits_{(D)} f_2(x,\ y)\,d\sigma.$$

Свойства эти доказываются так же как и для определенного интеграла.

3. *Если область D разбита некоторыми простыми кривыми на n областей $D', D'', \ldots, D^{(n)}$ без общих внутренних точек**), *а функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из этих областей, то имеет место равенство:*

$$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\,d\sigma = \iint\limits_{(D')} f(x,\ y)\,d\sigma + \iint\limits_{(D'')} f(x, y)\,d\sigma + \ldots + \iint\limits_{(D^{(n)})} f(x,y)\,d\sigma. \quad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем для $n = 2$. Так как функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то предел интегральной суммы для $f(x, y)$ не зависит от способа составления этой суммы и потому мы можем условиться, составляя сумму $\sum_n$, брать кривую L — границу областей D' и D'' в качестве одной из линий деления области D на частичные области $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Тогда каждое разбиение D на частичные области будет порождать некоторое разбиение на частичные области и каждой из областей D', D'' (рис. 42). Поэтому интегральную сумму $\sum_n$ по области D можем представить следующим образом:

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i = \sum_j{}'_n f(\xi_j, \eta_j)\,\Delta\sigma_j + \sum_k{}''_n f(\xi_k,\ \eta_k)\,\Delta\sigma_k, \quad (*)$$

где в суммы $\sum'_n$ и $\sum''_n$ входят слагаемые, отвечающие частичным областям, входящим соответственно в D' и D'', так что эти суммы будут интегральными суммами функции $f(x, y)$ по областям D' и D''. По условию все эти суммы $\sum_n, \sum'_n, \sum''_n$ имеют пределы при $d \to 0$ равные соответствующим интегралам**), поэтому, переходя в равенстве (*) к пределу, получим требуемое равенство (1).

---

*) В дальнейшем в аналогичных случаях факт отсутствия у областей разбиения общих внутренних точек будет считаться само собой разумеющимся, и соответствующей оговорки делаться не будет.

**) На самом деле здесь достаточно было бы предположить интегрируемость $f(x, y)$ в двух каких-либо из областей D', D'' и D, так как отсюда уже будет вытекать интегрируемость $f(x, y)$ в третьей из них. Принятая в тексте формулировка теоремы дана лишь для облегчения доказательства.

4. *Если* $f(x, y)$ *и* $\varphi(x, y)$ *— интегрируемые в* D *функции, то из неравенства* $f(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, *следует неравенство*

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{(D)} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

5. *Если функция* $f(x, y)$ *интегрируема в области* D, *то и функция* $|f(x, y)|$ *интегрируема в этой области и*

$$\left|\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_{(D)} |f(x, y)|\, d\sigma.$$

6. *Если функция* $f(x, y)$ *интегрируема и непрерывна**) *в простой связной***) *области* D *площади* S, *то в этой области найдется такая точка* (ξ, η), *что*

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma = f(\xi, \eta)\, S$$

(теорема о среднем значении).

Свойства 4—6 доказываются аналогично соответствующим свойствам определенного интеграла.

§ 65. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Из классов интегрируемых функций мы рассмотрим здесь в основном только класс непрерывных функций.

Теорема 1. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна в некоторой простой области* D, *то она интегрируема в этой области.*

Доказательство. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная в простой области D функция, m и M — ее наименьшее и наибольшее значения в этой области. Разобьем область D на частичные простые области $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Функция $f(x, y)$ будет непрерывной в каждой из областей D_i и будет иметь в D_i наименьшее и наибольшее значения m_i и M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Составим теперь интегральные суммы s и S специального вида: $s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i$ и $S = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i$, которые будем называть соответственно нижней и верхней интегральными суммами функции $f(x, y)$ на D (ср. т. I, § 95).

Суммы s и S обладают следующими свойствами:

1. Любая интегральная сумма $\sum_n$ *функции* $f(x, y)$, *составленная по данному разбиению области* D, *заключена между нижней и верхней ее суммами* s *и* S, *составленными для того же разбиения.*

2. При переходе от некоторого разбиения области D *на частичные к новому разбиению, полученному путем добавления* (*к уже*

---

*) Условие интегрируемости здесь на самом деле излишне: непрерывная в простой области функция $f(x, y)$ интегрируема в ней (см. § 65).

**) Связность здесь упомянута отдельно из-за обстоятельства замкнутости области D и возможности связанных с этим осложнений.

имеющейся сети) новых линий (меры нуль), нижняя сумма s функции $f(x, y)$ не убывает, а верхняя S — не возрастает.

3. Верхняя сумма функции $f(x, y)$, соответствующая любому разбиению области D, не меньше нижней суммы (этой же функции), соответствующей каждому разбиению этой области.

4. Множество всех верхних сумм функции $f(x, y)$ на D имеет нижнюю грань I, причем для любых интегральных сумм s и S этой функции на D имеет место неравенство: $s \leqslant I \leqslant S$.

Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств интегральных сумм для функции одного переменного (т. I, § 95), и мы воспроизводить их не будем.

Зададимся теперь некоторым положительным числом ε. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она и равномерно непрерывна в этой области (§ 41), и потому по любому числу $\varepsilon_1 > 0$, в частности по числу $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{Q}$, где Q — площадь области D, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что как только расстояние между точками (x', y') и (x'', y'') (где бы они ни лежали в области D) будет меньше δ, так выполняется неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{Q}. \tag{1}$$

Разобьем, далее, область D на простые частичные области D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы наибольший диаметр d этих областей был меньше указанного числа δ. Тогда для каждых двух точек (x', y'), (x'', y''), принадлежащих любой (одной и той же) из частичных областей D_i, будет выполняться неравенство (1) и, в частности, окажется: $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{Q}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда для сумм s и S будем иметь:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\sigma_i < \frac{\varepsilon}{Q} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i =$$

$$= \frac{\varepsilon}{Q} \cdot Q = \varepsilon.$$

Но по свойству 4 мы имеем $S \geqslant I \geqslant s$, где I — нижняя грань сумм S на D, и, кроме того, для любой из интегральных сумм $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ данного разбиения по свойству 1 будет: $S \geqslant \Sigma_n \geqslant s$.

Сопоставляя соотношения $S \geqslant I \geqslant s$ и $S \geqslant \Sigma_n \geqslant s$, находим: $|\Sigma_n - I| \leqslant S - s$. Но $S - s < \varepsilon$, так что и подавно $|\Sigma_n - I| < \varepsilon$.

Так как Σ_n — произвольная интегральная сумма для $f(x, y)$ на D, то согласно определению интегрируемости функции это означает, что $f(x, y)$ интегрируема в D. Теорема доказана.

Приведем (без доказательства) еще следующую теорему об интегрируемых функциях.

Теорема 2. *Если ограниченная функция $f(x, y)$ имеет в простой области D точки разрыва лишь на нескольких кривых меры нуль, то $f(x, y)$ интегрируема в D. При этом изменение значений такой функции в точках кривой меры нуль не влияет на значение двойного интеграла по D.*

§ 66. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Предварительно введем понятие повторного (двукратного) интеграла функции двух переменных. Пусть в прямоугольнике D $(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$ определена функция $f(x, y)$ и пусть при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$. Тогда каждому значению x из $[a, b]$ можно поставить в соответствие свое единственное число — значение этого интеграла; тем самым данный интеграл на $[a, b]$ будет функцией от x: $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$. Может случиться, что функция $\Phi(x)$ в свою очередь интегрируема на сегменте $[a, b]$. Тогда интеграл $U = \int\limits_a^b \Phi(x)\,dx = \int\limits_a^b \left\{\int\limits_c^d f(x, y)\,dy\right\} dx$ называется *повторным* или *двукратным интегралом функции* $f(x, y)$ *по прямоугольнику* D, взятым сначала по y, а затем по x, и записывается обычно так:

$$U = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

Аналогично определяется повторный (двукратный) интеграл $\bar{U}$ функции $f(x, y)$ по D, взятый сначала по x, а затем по y: $\bar{U} = \int\limits_c^d \psi(y)\,dy = \int\limits_c^d \left\{\int\limits_a^b f(x, y)\,dx\right\} dy$. Записывают: $\bar{U} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$.

Понятие повторного интеграла может быть распространено и на случай переменных пределов интегрирования. Так, если функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике D, а функции $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ определены на сегменте $[a, b]$ и принимают значения, не выходящие за сегмент $[c, d]$, то в случае интегрируемости $f(x, y)$ по y на $[c, d]$ при любом $a \leqslant x \leqslant b$ можно говорить об интеграле

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \tag{1}$$

а также (в случае интегрируемости $\Phi(x)$ на $[a, b]$) о повторном интеграле вида $U = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$.

Аналогично вводятся функция $\psi_{(y)}=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx$ и повторный интеграл вида $\overline{U}=\int\limits_c^d \psi(y)\,dy$, т. е. $\overline{U}=\int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx$.

Отметим следующее свойство функции $\Phi(x)$ из (1).

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D ($a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$), а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и принимают на нем значения, принадлежащие $[c, d]$, то функция* (1) *при всяком $y \in [c, d]$ непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна на D, то она при любом x из $[a, b]$ будет непрерывной, а тем самым и интегрируемой на $[c, d]$ функцией одного переменного y; тем более она будет интегрируема на $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ (или $[\varphi_2(x), \varphi_1(x)]$).

Выберем теперь на $[a, b]$ некоторое значение x и зафиксируем его. Дадим этому значению x приращение Δx ($x+\Delta x \in [a, b]$) и вычислим соответствующее приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x+\Delta x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy-\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

Преобразуем это выражение:

$$\Delta\Phi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x+\Delta x)}^{\varphi_1(x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy+\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy+$$
$$+\int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy-\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy,$$

или

$$\Delta\Phi(x)=\int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy-\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy+$$
$$+\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}[f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)]\,dy. \qquad (2)$$

Зададимся теперь некоторым положительным числом ε и оценим по абсолютной величине интегралы из правой части (2). Вместе с функцией $f(x, y)$ и функция $|f(x, y)|$ непрерывна в прямоугольнике D и потому имеет на нем наибольшее значение, обозначим его через M. Так как, далее, функции $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то, например, по числу $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{3M}>0$ можно подобрать такое число $\delta_1>0$, что при $|\Delta x|<\delta_1$ будут выполняться неравенства:

$$|\varphi_1(x+\Delta x)-\varphi_1(x)|<\varepsilon_1,\quad |\varphi_2(x+\Delta x)-\varphi_2(x)|<\varepsilon_1.$$

Подчинив Δx указанному условию, найдем, что

$$\left|\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy\right| \leqslant \left|\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} |f(x+\Delta x,\ y)|\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} M dy\right| = M\,|\varphi_2(x+\Delta x) - \varphi_2(x)| < M\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично устанавливается, что $\left|\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Таким образом,

$$\left|\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Оценим, наконец, третье слагаемое из правой части (2). Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области (прямоугольнике) D, то она и равномерно непрерывна в этой области (§ 41), а потому всегда можно по заданному числу $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3\cdot|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|}$ *) (x—фиксировано) подобрать такое число $\delta_2 > 0$, что при

$$|x' - x''| < \delta_2 \text{ и } |y' - y''| < \delta_2 \ ((x', y'), (x'', y'') \in D) \quad (4)$$

будет выполняться неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon_2$. В частности, взяв Δx при условии: $|\Delta x| < \delta_2$, мы найдем выполненными неравенства (4) и для точек $(x+\Delta x, y)$, (x, y), а потому будем иметь для таких x: $|f(x+\Delta x, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3\,|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|}$, откуда

$$\left|\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)]\,dy\right| \leqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\varepsilon dy}{3\,|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

Беря теперь Δx при условии $|\Delta x| < \delta$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, мы найдем выполненными все неравенства (3) и (5) и для таких Δx получим из (2):

$$|\Delta\Phi| \leqslant \left|\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy\right| + \left|\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+\Delta x)} f(x+\Delta x,\ y)\,dy\right| +$$

$$+ \left|\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f(x+\Delta x,\ y) - f(x, y)]\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

---

*) Считаем $\varphi_2(x) \neq \varphi_1(x)$ для выбранного x, в противном случае оцениваемое третье слагаемое равно нулю и приводимая ниже оценка для $\Delta\Phi$ тем более справедлива.

а это согласно определению непрерывности функции и означает, что функция $\Phi(x)$ непрерывна в произвольной точке x сегмента $[a, b]$. Теорема доказана.

Аналогичное свойство имеет место и для функции $\psi(y)$.

В частности, здесь для $\Phi(x)$ может оказаться, что на сегменте $[a, b]$ $\varphi_1(x) = c$ (const) и $\varphi_2(x) = d$ (const). Тогда тривиальным образом условия теоремы выполняются, и, значит, в частности, функция $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ также является непрерывной на $[a, b]$.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении двойного интеграла

Вычисление двойного интеграла может быть сведено при выполнении надлежащих условий к вычислению некоторого двукратного интеграла. При этом существенным является вид области интегрирования.

1. Случай прямоугольной области интегрирования. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, тогда, поскольку прямоугольник — простая область, существует двойной интеграл $\iint_{(D)} f(x, y)\,d\sigma$. Укажем способ удобного его вычисления.

Разобьем сегменты $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно с помощью чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ x_0 = a,\ x_n = b)$ и частичные сегменты $[y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m,\ y_0 = c,\ y_m = d)$. Тогда, проводя прямые

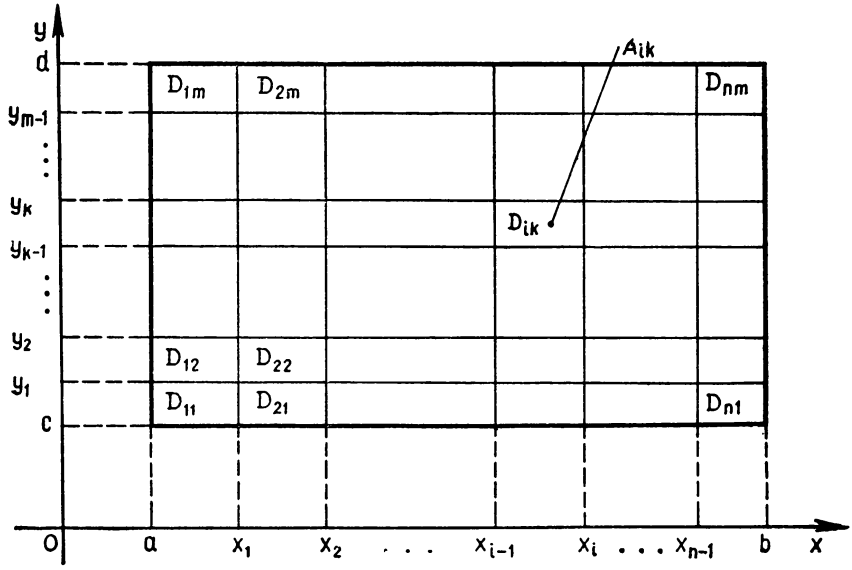


Рис. 43

$x = x_i$, $y = y_k$, мы разобьем прямоугольник D на частичные прямоугольники D_{ik} так, что D_{ik} задается неравенствами: $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, $y_{k-1} \leqslant y \leqslant y_k$ (рис. 43). Выберем в пределах каждого из частичных прямоугольников по точке, причем, так как интеграл $I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma$ существует, выбор таких точек можно совершать по произволу. В целях удобства будем выбирать в каждой области D_{ik} точку $A_{ik}(x_i, y_k)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$), т. е. будем брать точку в правой верхней вершине прямоугольника D_{ik}; тогда получим интегральную сумму вида:

$$\sum = \sum_{\substack{i=1, 2, \ldots, n, \\ k=1, 2, \ldots, m}} f(x_i, y_k)\, \Delta\sigma_{ik} = \sum_{\substack{i=1, 2, \ldots, n, \\ k=1, 2, \ldots, m}} f(x_i, y_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_k,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Будем сначала брать (фиксируя i) те слагаемые этой суммы, которые относятся к частичным прямоугольникам полосы между прямыми $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ (см. рис. 43), а затем будем в свою очередь суммировать полученные таким образом для различных i суммы, меняя i от 1 до n, тогда получим:

$$\sum = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} [f(x_i, y_k)\, \Delta y_k] \right\} \Delta x_i.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ наперед задано. Так как двойной интеграл $I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma$ по области D существует, то интегральная сумма $\sum$ имеет пределом I при $d \to 0$, где d — наибольший из диаметров частичных областей (здесь — наибольшая из диагоналей частичных прямоугольников), т. е. существует такое $\delta > 0$, что при $d < \delta$ выполняется неравенство: $|\sum - I| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но если разбить сегменты $[a, b]$ и $[c, d]$ на такие части, для которых $|\Delta x_i| = \Delta x_i < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $|\Delta y_k| = \Delta y_k < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, то каждый диаметр частичных прямоугольников будет меньше δ: $d_{ik} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_k)^2} < \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2}} = \delta$ и, значит, неравенства $|\Delta x_i| < \delta_1$, $|\Delta y_k| < \delta_1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$), где $\delta_1 = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, влекут за собой неравенство $|\sum - I| < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} f(x_i, y_k)\, \Delta y_k \right\} \Delta x_i - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

На сумму, находящуюся здесь в фигурных скобках, мы вправе смотреть как на (специального вида) интегральную сумму для функции $f(x_i, y)$ одного переменного y, составленную на сегменте $[c, d]$.

Но в силу непрерывности функции $f(x, y)$ в прямоугольнике D функция $f(x, y)$ непрерывна по y на $[c, d]$, каким бы ни было $x_i \in [a, b]$, и, следовательно, интегральная сумма $\sum_{k=1}^{m} f(x_i, y_k)\Delta y_k$ при $\Delta y_k \to 0$ имеет предел, который равен $\Phi(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy$. Зафиксировав теперь во внутренней сумме из (6) x_i и Δx_i и переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta y_k \to 0$, найдем*):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\, \Delta x_i - I \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{7}$$

Здесь $\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\Delta x_i$ есть интегральная сумма для $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$, составленная (специальным образом) на сегменте $[a, b]$, и поскольку по теореме 1, $\Phi(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, то $\int_a^b \Phi(x)\, dx$ существует и

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\, \Delta x_i = \int_a^b \Phi(x)\, dx.$$

Однако, поскольку неравенство (7) выполняется, как только $|\Delta x_i| < \delta_1$, где δ_1 подобрано по взятому $\varepsilon > 0$, из него следует, что

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\, \Delta x_i = I, \text{ т. е. } I = \int_a^b \Phi(x)\, dx:$$

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \Phi(x)\, dx$$

или (с. 275)

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{8}$$

Меняя в проведенных выше рассуждениях переменные x и y ролями, мы аналогичным образом докажем следующее равенство:

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{8'}$$

*) Для пределов интегральных сумм верны теоремы об обычных пределах, в том числе о переходе к пределу в неравенствах (т. I, § 99, замечание).

Таким образом, установлено, что при указанных выше условиях существуют как двойной интеграл от данной функции $f(x, y)$, так и оба повторных (двукратных) интеграла, и имеют место равенства (8) и (8′).

Значение формул (8) и (8′) состоит в том, что они сводят вычисление двойного интеграла (по прямоугольной области) к последовательному вычислению двух «обычных» («однократных») определенных интегралов от функции одного переменного, методы вычисления которых уже ранее были изучены. Какую из этих формул удобнее применять в том или ином случае, устанавливается в зависимости от вида функции $f(x, y)$. Из сказанного следует, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в данном прямоугольнике D: $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$, то оба повторных (двукратных) ее интеграла по этой области существуют и (см. (8) и (8′)) равны между собой:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{9}$$

Замечание 1. В связи с формулами (8) и (8′) сам двойной интеграл I часто также условно пишут с помощью символов dx и dy, записывая вместо символа $\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma$ символ $\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy$. В этом же смысле также пишут: $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$ и $\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dy\, dx$.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ по прямоугольной области D, задаваемой неравенствами: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Решение. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в D, то искомый двойной интеграл существует и для вычисления его мы можем применить любую из формул (8), (8′), например формулу (8). Имеем:

$$\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2 + 1)\, d\sigma = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1)\, dy.$$

При первом («внутреннем») интегрировании (по y) x считается постоянным, поэтому

$$\Phi(x) = \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1)\, dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^2 = 2x^2 + \frac{14}{3},$$

$$\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2 + 1)\, d\sigma = \int_{-1}^{1} \Phi(x)\, dx = 2 \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{14}{3}\right) dx = \frac{32}{3}.$$

Запись при этом обычно ведется следующим образом:

$$\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2 + 1)\, d\sigma = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1)\, dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^2 + \frac{14}{3}\right) dx = 2\left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{14}{3} x\right)\Big|_0^1 = \frac{32}{3}.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_{(D)} x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,d\sigma$, где замкнутая область D ограничена прямыми $x=0$, $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция в области D определена и непрерывна, и двойной интеграл от нее существует. По формуле (8′) находим:

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^1 x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 y} \times$$

$$\times \frac{2}{3}[1+(x^2-1)\sin^2 y]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 dy = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3 y}{\sin^2 y}\,dy = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 y} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\sin^2 y}{\sin^2 y}\cos y\right) dy = \frac{1}{3}\left(-\operatorname{ctg} y + \frac{1}{\sin y} + \sin y\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Заметим, что, если бы мы здесь сначала стали интегрировать по y, интегрирование встретило бы значительные трудности, так как интеграл $U = \int\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,dy$ не выражается (вообще говоря) через элементарные функции*).

2. Случай криволинейной области. Пусть область интегрирования D теперь уже является криволинейной областью, но специального типа: D — замкнутая область, ограниченная «с боков» прямыми $x=a$ и $x=b$, «снизу» — кривой $y=\varphi_1(x)$, «сверху» — кривой $y=\varphi_2(x)$ ($\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)$ на $[a, b]$), где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции (рис. 44). Такую область мы будем называть *простейшей областью* (*I типа*)**). Очевидно, что контур такой области D — кривая меры нуль (§ 61), и потому эта область квадрируема.

Так как функции $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то они имеют на нем наибольшее и наименьшее значения. Пусть c — наименьшее значение

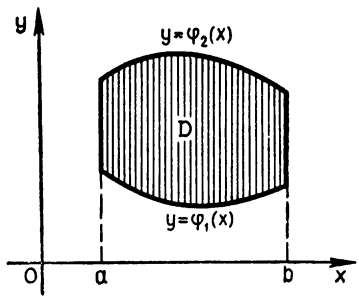


Рис. 44

*) Так как здесь $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $1-x^2 \geqslant 0$ и мы можем положить $1-x^2 = k^2$ (k — действительное число). Интеграл U тогда будет иметь вид: $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 y}\,dy$ — эллиптический интеграл, который (за исключением отдельных значений k) не берется в конечном виде.

**) Точки $[a, \varphi_1(a)]$ и $[a, \varphi_2(a)]$, как и точки $[b, \varphi_1(b)]$, $[b, \varphi_2(b)]$, могут при этом совпадать.

функции $\varphi_1(x)$ на этом сегменте, а d — наибольшее значение $\varphi_2(x)$ на том же сегменте. Тогда рассматриваемую область D можно полностью заключить в прямоугольник D': $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 45).

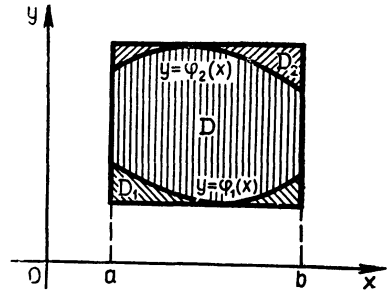


Рис. 45

Построим теперь следующую функцию $\overline{f}(x, y)$ с областью определения D':

$$\overline{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для } (x, y) \in D_1, \\ f(x, y) & \text{для } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{для } (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где области D_1 и D_2 указаны на рисунке 45. Эта функция интегрируема в каждой из простых областей D_1, D, D_2, D', так как она в каждой из этих областей непрерывна, за исключением, быть может (см. задание функции), точек одной (для D_1 и D_2) или обеих (для D) из кривых $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ меры нуль (теорема 2, § 65). При этом и сами значения подынтегральной функции соответствующих интегралов на указанных кривых могут не браться в расчет (см. там же). Отсюда, в частности, $\iint\limits_{(D_1)} \overline{f}(x, y)\, d\sigma = 0 = \iint\limits_{(D_2)} \overline{f}(x, y)\, d\sigma$, и по свойству 3 (с. 272)

$$\iint\limits_{(D')} \overline{f}(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{(D_1)} \overline{f}(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{(D)} \overline{f}(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{(D_2)} \overline{f}(x, y)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \overline{f}(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma \qquad (10)$$

Поскольку $f(x, y)$ непрерывна в D, то при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$, а значит, и равный ему интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \overline{f}(x, y)\, dy$: для $a \leqslant x \leqslant b$ и $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ точка (x, y) принадлежит области D, а в таких точках $\overline{f}(x, y) = f(x, y)$. Далее, $\int\limits_{c}^{\varphi_1(x)} \overline{f}(x, y)\, dy = 0 = \int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} \overline{f}(x, y)\, dy$, так как при $c \leqslant y \leqslant \varphi_1(x)$, а также при $\varphi_2(x) \leqslant y \leqslant d$ точка (x, y) принадлежит той части прямоугольника, которая входит в D_1 или в D_2. Учитывая все это, заключаем, что существует интеграл $\int\limits_{c}^{d} \overline{f}(x, y)\, dy$, причем

$$\int_{c}^{d} \overline{f}(x, y)\, dy = \int_{c}^{\varphi_1(x)} \overline{f}(x, y)\, dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \overline{f}(x, y)\, dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \overline{f}(x, y)\, dy,$$

т. е.

$$\int_c^d \overline{f}(x,\ y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy \qquad (11)$$

Так как функция $\overline{f}(x, y)$ может не оказаться непрерывной во всей области D', то для непосредственного применения к ней на D' формулы (8) мы не имеем данных. Однако при выводе этой формулы мы по существу опирались лишь на следующие условия: 1) данная функция интегрируема в D; 2) соответствующая функция $\Phi(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а эти условия здесь как раз и выполняются: прежде всего $\overline{f}(x, y)$ интегрируема в D'; далее, существует функция $\Phi(x) = \int_c^d \overline{f}(x, y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$, и так как функция $f(x, y)$ непрерывна в D, то $\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ — непрерывная на $[a, b]$ функция (теорема 1*)). Итак, к $\overline{f}(x, y)$ на прямоугольнике D' можно применить формулу (8):

$$\iint_{(D')} \overline{f}(x,\ y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d \overline{f}(x,\ y)\,dy,$$

откуда, учитывая (10) и (11), приходим к формуле:

$$\iint_{(D)} f(x,\ y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy, \qquad (12)$$

сводящей вычисление двойного интеграла к вычислению интеграла двукратного.

Если область D, в которой $f(x, y)$ непрерывна, ограничена кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, причем $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на $[c, d]$ и $\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)$ для $y \in [c, d]$ (*простейшая область II типа*, рис. 46), то для нее, рассуждая аналогично, можно доказать справедливость равенства

$$\iint_{(D)} f(x,\ y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx. \qquad (12')$$

Формулы (12) и (12′) обобщают формулы (8) и (8′). Следует отметить, что наружные пределы повторного интеграла всегда постоянны и в (12)—(12′).

Замечание 2. Может случиться, что область D можно рассматривать одновременно и как простейшую область I типа и

*) При доказательстве этой теоремы мы пользовались фактически лишь непрерывностью функции $f(x, y)$ в области, ограниченной кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

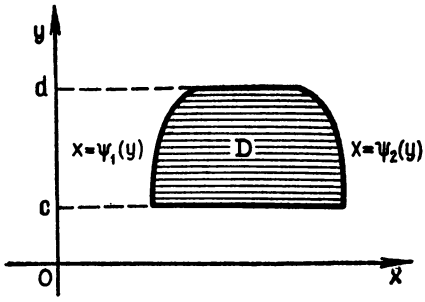


Рис. 46

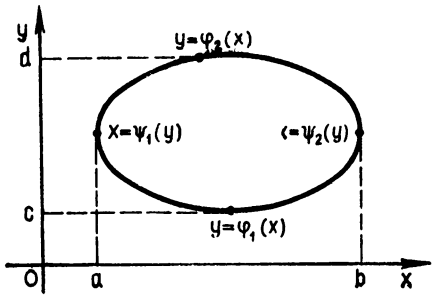


Рис. 47

как простейшую область II типа (рис. 47), в таком случае для непрерывной в D функции $f(x, y)$ верны как формула (12), так и формула (12′), и в зависимости от обстоятельств целесообразно пользоваться то одной, то другой из них.

В рассматриваемом случае мы можем также написать равенство:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx. \qquad (13)$$

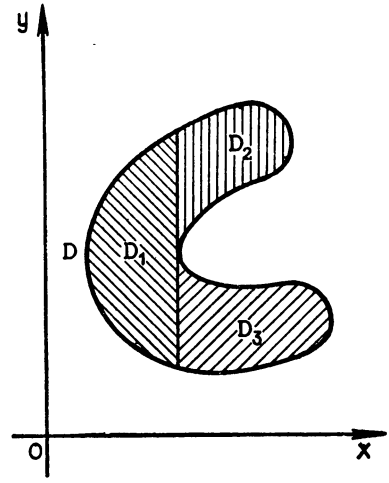


Рис. 48

Отметим, что при использовании равенства (13) для перехода от одной его части к другой часто говорят, что в повторном интеграле производят перемену порядка интегрирования (тот же способ выражения применяется относительно (9) — частного случая равенства (13)).

Замечание 3. В ряде случаев область D интегрирования не является простейшей областью (I или II типа), но может быть разбита на несколько таких областей, например на D_1, D_2, D_3 (рис. 48). В этих случаях, пользуясь свойством 3 двойного интеграла (с. 272), мы снова сможем свести вычисление двойного интеграла к повторному однократному интегрированию (по (12), (12′)).

Замечание 4. И в случае криволинейной области интегрирования часто применяют для двойного интеграла обозначение:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy \text{ или } \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\,dy\,dx.$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = x + 2y$ по замкнутой области D, ограниченной линиями $y = 8x$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $x = 1$, $x = 3$.

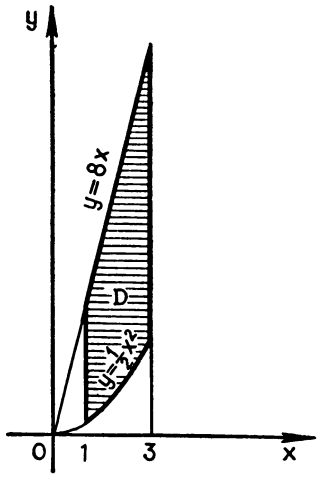


Рис. 49

Решение. Область D — простейшая область I типа (но не второго): решая неравенство $\frac{1}{2}x^2 < 8x$, убеждаемся, что оно справедливо при $0 < x < 16$, а потому и подавно оно будет справедливо на $[1, 3]$, и мы можем здесь принять $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\varphi_2(x) = 8x$ (рис. 49), причем $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные функции вообще и, в частности, на $[1, 3]$. Следовательно, по формуле (12):

$$\iint\limits_{(D)} (x + 2y)\, d\sigma = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{8x} (x + 2y)\, dy =$$

$$= \int\limits_1^3 (xy + y^2) \Big|_{\frac{1}{2}x^2}^{8x} dx =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(8x^2 + 64x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) dx = \left(24x^3 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{20}\right)\Big|_1^3 = 602{,}1.$$

Заметим, что аналитические рассуждения по поводу вида области интегрирования можно часто заменить построением соответствующего геометрического изображения области D, из которого уже и делать затем заключение о пределах интегрирования. Так, в данном случае на рисунке 49 можно видеть, что область интегрирования задается неравенствами: $1 \leqslant x \leqslant 3$, $\frac{1}{2}x^2 \leqslant y \leqslant 8x$.

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} (2x + y)\, d\sigma$ по области D, ограниченный окружностями $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$ и прямыми $y = 0$, $y = 3$ $(x > 0)$.

Решение. Область D — часть кольца, образованного данными окружностями и заключенная между указанными прямыми. Она является простейшей областью II типа. Имеем:

$$I = \iint\limits_{(D)} (2x + y)\, d\sigma = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} (2x + y)\, dx = \int\limits_0^3 (x^2 + xy) \Big|_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dy =$$

$$= \int\limits_0^3 (16 + y\sqrt{25-y^2} - y\sqrt{9-y^2})\, dy = \left[16y - \frac{1}{3}(25 - y^2)^{\frac{3}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}(9 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{178}{3}.$$

Пример 5. Вычислить $\iint\limits_{(D)} \frac{c}{xy}\,d\sigma$ $(c > 0)$, где область D ограничена кривыми $xy = \frac{c}{a}$ и $xy = \frac{c}{b}$ $(0 < a < b)$ и прямыми $x = m$, $x = n$ $(0 < m < n)$.

Р е ш е н и е. Имеем простейшую область I типа. Из условия задачи следует, что область интегрирования лежит в первой четверти и $\frac{c}{bx} < \frac{c}{ax}$; таким образом,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{c}{xy}\,d\sigma = \int\limits_m^n dx \int\limits_{\frac{c}{bx}}^{\frac{c}{ax}} \frac{c}{xy}\,dy = \int\limits_m^n \frac{c}{x} \ln y \Big|_{\frac{c}{bx}}^{\frac{c}{ax}} dy = c \int\limits_m^n \frac{1}{x}\left(\ln \frac{c}{ax} - \ln \frac{c}{bx}\right) dx =$$

$$= c \int\limits_m^n \frac{1}{x} \ln \frac{b}{a}\,dx = c \ln \frac{b}{a} \ln \frac{n}{m}.$$

§ 67. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

При вычислении двойного интеграла нередко бывает целесообразно произвести замену переменных интегрирования. Предварительно рассмотрим некоторые вспомогательные понятия.

1. Отображение (плоской) области на область. Пусть даны две плоскости P и Q, на каждой из которых введена прямоугольная система координат: x и y — координаты на первой плоскости, u и v — на второй. Рассмотрим на первой из этих плоскостей замкнутую область D, на второй — замкнутую область G, в частности каждая из этих областей может быть и всей (соответствующей) плоскостью. Границы этих областей обозначим соответственно через C и Γ (рис. 50). Эти границы будем считать кусочно-гладкими кривыми (с. 133).

Предположим, далее, что на плоскости Q в области G задана система двух функций

$$x = \varphi(u, v) \text{ и } y = \psi(u, v), \qquad (1)$$

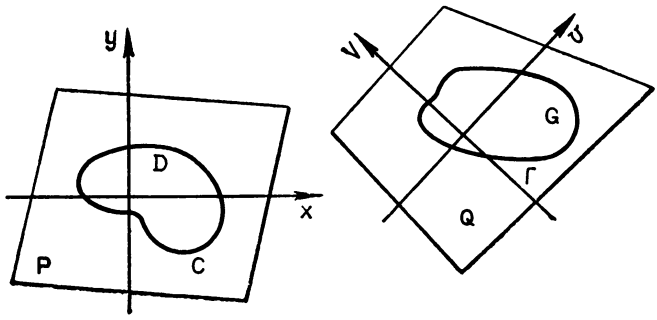


Рис. 50

такая, что каждой точке $(u, v) \in G$ будет по (1) соответствовать точка (x, y) именно из области D (образ взятой точки (u, v)), причем каждая из точек $(x, y) \in D$ является (по (1)) образом хотя бы одной точки $(u, v) \in G$. Тогда мы будем иметь однозначное отображение (преобразование) области G на область D. Условимся говорить, что оно задается системой (1). Будем также предполагать здесь, что и, наоборот, каждой точке $(x, y) \in D$ будет соответствовать единственная точка $(u, v) \in G$, такая, что выполняются равенства (1), так что эти равенства определяют u и v как неявные функции (на области D) от x и y:

$$u = \bar{\varphi}(x, y) \text{ и } v = \bar{\psi}(x, y). \tag{2}$$

Тем самым тогда будет существовать и обратное отображение (преобразование) D на G, определяемое системой (2). Таким образом имеем взаимно однозначное отображение (преобразование) областей D, G*).

Потребуем, чтобы функции из (1) и (2) еще имели в своих областях определения непрерывные частные производные первого порядка.

Для якобианов $I = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ и $I_1 = \dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$ систем (1) и (2) (§ 53), или, как говорят, отображений (1) и (2), в таком случае (в соответствующих точках этих областей) будет выполняться соотношение:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1. \tag{3}$$

В самом деле, по известному правилу умножения определителей:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Но в силу взаимно однозначного отображения областей D и G должны выполняться для всех $(x, y) \in D$ тождества:

$$\varphi[\bar{\varphi}(x, y), \bar{\psi}(x, y)] \equiv x, \psi[\bar{\varphi}(x, y), \bar{\psi}(x, y)] \equiv y,$$

так что равенствами $x = \varphi(u, v)$, $u = \bar{\varphi}(x, y)$, $v = \bar{\psi}(x, y)$ и $y = \psi(u, v)$, $u = \bar{\varphi}(x, y)$, $v = \bar{\psi}(x, y)$ определяются соответственно сложные функции $x = x$ и $y = y$, для которых по правилу дифференцирования сложной функции нескольких переменных (§ 45) имеем:

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$1 = \frac{dy}{dy} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

*) В частности, оно может быть и отображением самих плоскостей P и Q.

так что (см. (4)), действительно,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Из равенства (3) следует, что каждый из якобианов

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \text{ и } I_1(x, y) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

отличен от нуля в своей области определения.

Далее, так как частные производные, входящие в якобианы $I(u, v)$ и $I_1(x, y)$, непрерывны соответственно в G и D, то и сами эти якобианы также будут непрерывными в этих областях. Но в таком случае, считая область G (а значит, и D) связной, мы можем заключить, что каждый из этих якобианов будет сохранять в своей области определения постоянный знак: если бы, например, функция $I_1(x, y)$ принимала в каких-либо двух точках из D значения различных знаков, то по теореме 4, § 41 она должна была бы в некоторой точке той же области обращаться в нуль. Преобразование указанного типа будем называть непрерывным преобразованием области G (D).

При непрерывном преобразовании каждая внутренняя точка (x_0, y_0) (соответственно (u_0, v_0)) области D (G) переходит во внутреннюю же точку (u_0, v_0) (соответственно (x_0, y_0)) области G (D). В самом деле по теореме о существовании неявных функций (§ 52) равенства (2) определяют в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) (рассматриваем первый вариант) x и y как некоторые функции от u и v: $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$, такие, что $\varphi(u_0, v_0) = x_0$, $\psi(u_0, v_0) = y_0$ и, следовательно, точка (u_0, v_0) внутренняя для G.

Отсюда уже следует, что каждая точка границы C переходит при таком преобразовании в некоторую точку границы Γ — граница одной области преобразуется в границу другой области.

Верно также и то, что каждая гладкая (или кусочно-гладкая) кривая λ ($u = \alpha(t)$, $v = \beta(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) области G переводится непрерывным отображением в гладкую (кусочно-гладкую) же кривую L области D (и наоборот). Действительно, по (1) имеем:

$$x = \varphi[\alpha(t), \beta(t)] = \gamma(t), \quad y = \psi[\alpha(t)\beta(t)] = \delta(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

причем производные

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{d\beta}{dt} \tag{5}$$

существуют и являются непрерывными функциями (§ 45). Далее, при условии гладкости кривой λ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ не обращаются ни в одной точке из $[t_1, t_2]$ одновременно в нуль, иначе, поскольку

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

мы имели бы из системы (5), что в некото-

рой точке $\bar{t} \in [t_1, t_2]$ $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, $\frac{d\beta}{dt} = 0$, а это противоречит гладкости рассматриваемой кривой.

Аналогично рассматривается и случай кусочно-гладкой кривой.

2. Криволинейные координаты. Переменные u и v на плоскости Q в области G можно рассматривать как декартовы координаты точек этой области. Однако, так как при взаимно однозначном отображении каждой паре чисел u и v ($(u, v) \in G$) соответствует по (1) единственная точка $M(x, y)$ области D на плоскости P и наоборот, то эти же числа u, v можно в то же время рассматривать как новые координаты точек M области D на плоскости P. Такие координаты точек на плоскости P (принадлежащих D) называются *криволинейными координатами* точек этой плоскости.

Если на плоскости Q взять некоторую прямую $u = u_0$ (точнее, часть этой прямой, лежащую в G), то в области D ей будет соответствовать некоторая (определяемая по (2)) «кривая» линия с уравнением $\bar{\varphi}(x, y) = u_0$ в декартовых координатах плоскости P (ее можно задать еще параметрическими уравнениями: $x = \varphi(u_0, v)$, $y = \psi(u_0, v)$). Аналогичное будет происходить с прямой $v = v_0$ области G — в области D ей будет соответствовать некоторая кривая $\bar{\psi}(x, y) = v_0$. Таким образом, на плоскости P (или ее части) наряду с обычной сеткой декартовых прямоугольных координат, состоящей из семейств прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, возникает новая, криволинейная координатная сетка, состоящая из двух семейств координатных линий — кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (отсюда и название: «криволинейные координаты»).

Так как при рассмотренном отображении соответствие между точками областей G и D взаимно однозначное, то через каждую точку области D проходит одна и только одна координатная линия каждого из координатных семейств и, следовательно, никакие две кривые одного и того же семейства не пересекаются.

Примером криволинейных координат на плоскости являются полярные координаты. Они возникают, как известно, при отображении следующего вида: $x = u \cos v$ и $y = u \sin v$, или в привычных обозначениях:

$$x = r \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi, \tag{6}$$

где берется $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Последние неравенства задают на плоскости Q область G. В декартовых координатах на плоскости Q — это полуполоса между прямыми $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ (без самой прямой $\varphi = 2\pi$), ограниченная слева осью ординат — прямой $r = 0$. При отображении (6) такая полуполоса переходит, очевидно, во всю плоскость xOy (плоскость P). Это отображение не является, однако, полностью взаимно однозначным: точке $x = 0$, $y = 0$ на плоскости P можно поставить в качестве прообраза любую точку полосы G с координатой $r = 0$, т. е. любую точку $(0, \varphi)$ где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Однако, исключив из рассмотрения на плоскости xOy (P) начало координат, а на плоскости $r\varphi$ (Q) прямую $r = 0$,

мы получим уже взаимно однозначное отображение полуполосы ($r>0$; $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) на плоскость xOy с вынутой точкой (0, 0).

Если исключить еще и точки G, у которых $\varphi = 0$, и соответственно с этим точки плоскости xOy, у которых $y=0$, $x > 0$, то для полученных теперь областей G' на Q и D' на P отображение будет уже взаимно однозначным и взаимно непрерывным. Сетка координатных линий этой системы состоит из семейства кривых $r=r_0$, т. е. $x^2 + y^2 = r_0^2$ $(r_0 > 0)$ — окружностей с центром в (0, 0) и семейства линий $\varphi = \varphi_0$ $(0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi)$ — лучей прямых, выходящих из начала координат (рис. 51).

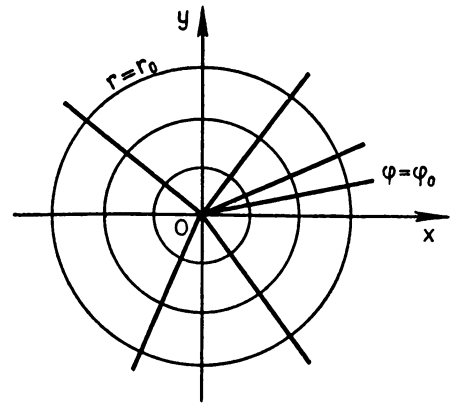


Рис. 51

Подсчитаем якобиан $I(r, \varphi)$ преобразования (6):

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Якобиан оказался (в пл. $r\varphi$) положительным при $r \neq 0$.

3. **Площадь в криволинейных координатах.** Пусть между областями D и G, лежащими в плоскостях xy и uv, установлено соотношениями (1) (п. 1) взаимно однозначное отображение, причем выполняются все условия, наложенные в пункте 1 на это отображение. Тогда имеет место следующее выражение для площади S области D:

$$S = \iint\limits_{(G)} |I(u, v)|\, du\, dv, \tag{7}$$

где $I(u, v)$ — якобиан преобразования (1).

Вывод этой формулы будет дан в следующей главе.

В качестве примера найдем выражение для площади в полярных координатах r и φ. Так как $I(r, \varphi) = r > 0$ (см. выше), то по (7) имеем:

$$S = \iint\limits_{(D)} r\, dr\, d\varphi. \tag{8}$$

4. Замена переменных в двойном интеграле. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладким контуром C.

Допустим теперь, что область D плоскости xOy с помощью соотношений (2) (п. 1) взаимно однозначно отображается на некоторую область G плоскости uv, причем обратное отображение осуществляется соотношениями вида (1). Будем при этом предполагать, как и в п. 1, что функции $\overline{\varphi}(x, y)$, $\overline{\psi}(x, y)$, как и функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$, имеют непрерывные частные производные соответственно в областях D и G. Тогда, как доказано выше (с. 288, 289), якобианы преобразований (1) и (2) будут отличны от нуля в соответствующих областях.

Разобьем теперь область D сетью каких-либо кусочно-гладких кривых на частичные области $D_1, D_2, \ldots, D_n$ и составим по произвольно выбранным в областях D_i точкам (ξ_i, η_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ интегральную сумму $\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, причем, так как $f(x, y)$ интегрируема в D (§ 65), существует предел этой суммы $\sum_n$ при $d \to 0$ и

$$\lim_{d\to 0}\sum_n = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma.$$

Преобразуем интегральную сумму $\sum_n$. Как мы знаем (с. 289), кусочно-гладкая кривая (плоскости xy) переходит при преобразовании рассматриваемого вида опять-таки в кусочно-гладкую кривую, в результате чего, найдя на плоскости uv образы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, мы обнаружим, что и область G разбита на частичные квадрируемые области. Воспользуемся соотношением (7) применительно к областям D_i и G_i; будем иметь:

$$\Delta\sigma_i = \iint\limits_{(D_i)} \left| I(u, v) \right| du\, dv$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$. Применяя теперь к этому интегралу теорему о среднем значении (функция $|I(u, v)|$ непрерывна в G), придем к соотношению: $\Delta\sigma_i = |I(\bar{u}_i, \bar{v}_i)|\Delta\sigma_i'$, где $\Delta\sigma_i'$ — площадь области G_i (для таких же i). Учитывая это соотношение, перепишем интегральную сумму $\sum_n$ в следующем виде:

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, |I(\bar{u}_i, \bar{v}_i)|\, \Delta\sigma_i'.$$

Пользуясь произволом в выборе точек (ξ_i, η_i) в D_i, возьмем эти точки так, чтобы $\xi_i = \varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$, $\eta_i = \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Тогда интегральная сумма $\sum_n$ примет вид:

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)]\, |I(\bar{u}_i, \bar{v}_i)|\, \Delta\sigma_i'.$$

Это — интегральная сумма для функции $f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]|I(u, v)|=$ $= F(u, v)$, составленная по области G.

Так как по теоремам о непрерывных функциях (§ 40) $F(u, v)$ — непрерывная в G функция, то существует $\lim\limits_{d' \to 0} \sum_n = \iint\limits_{(G)} F(u, v)\, du\, dv$, где d' — наибольший из диаметров областей G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Но в силу непрерывности рассматриваемого отображения областей D и G, при $d' \to 0$ и $d \to 0$, и потому $\lim\limits_{d \to 0} \sum_n = \lim\limits_{d' \to 0} \sum_n$, т. е.

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(G)} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\, |I(u, v)|\, du\, dv. \qquad (9)$$

Это и есть формула замены переменных под знаком двойного интеграла.

Формулу (9) легко запомнить, если представить себе, что в двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy$ вместо x и y в выражение $f(x, y)$ поставлены их значения из (1), а элемент площади $dx\, dy = dS$ заменен по (7) элементом площади в криволинейных координатах.

Распространенным частным случаем формулы (9) является формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах. В этом случае $u = r$, $v = \theta$, $\varphi(u, v) = \varphi(r, \theta) = r \cos \theta$; $\psi(u, v) = \psi(r, \theta) = r \sin \theta$, и формула (10) принимает следующий вид:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(G)} f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

или после замены обозначения θ на более привычное обозначение φ:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(G)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)\, r\, dr\, d\varphi. \qquad (10)$$

Формула (9) (как и ее частный случай (10)) часто бывает удобна тем, что интеграл, стоящий в правой ее части, оказывается (при надлежащем подборе функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$) проще, чем интеграл, предложенный для вычисления. Особенно она удобна в тех случаях, когда область D — криволинейный параллелограмм, т. е. ограничена однотипными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ и однотипными кривыми $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$. Тогда, принимая первые линии за кривые (u) первого семейства, а вторые линии — за кривые (v) второго семейства новой (криволинейной) координатной сетки, мы найдем пределы в соответствующем интеграле правой части (повторном интеграле) постоянными: область D переходит в этом случае в прямоугольник G на плоскости uv.

Замечание. Если условия взаимной однозначности и взаимной непрерывности отображения нарушаются лишь в отдельных точках или даже на целых линиях, но меры нуль, то, как нетрудно доказать, формулы типа (7), (9) останутся в силе (в этом можно убедиться, заключив эти точки, линии в области как угодно малой площади и применив затем предельный переход).

Пример. Вычислить двойной интеграл $U = \iint\limits_{(D)} (25 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy$, где D—замкнутая область, ограниченная полуокружностями $y = \sqrt{9 - x^2}$ и $y = \sqrt{16 - x^2}$ и осью Ox.

Решение. Непосредственное вычисление U сопряжено с громоздкими выкладками. Перейдем к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В области D $y \geqslant 0$, что дает: $\sin\varphi \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; далее, $\sqrt{9 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{16 - x^2}$, откуда $3 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 4$, или $3 \leqslant r \leqslant 4$. Интегрируем по r в пределах от $r = 3$ (на полуокружности $y = \sqrt{9 - x^2}$) до $r = 4$ (на полуокружности $y = \sqrt{16 - x^2}$), а по φ — от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$; область G плоскости $r\varphi$, на которую отображается данная область D, есть прямоугольник, ограниченный прямыми $r = 3$, $r = 4$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. При этом на прямой $\varphi = 0$ нарушается взаимная непрерывность отображения, но по только что сделанному замечанию это не влияет на справедливость формулы (11). Далее, здесь $f(x, y) = (25 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$ — непрерывная в простой области D*) функция, для которой $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (25 - r^2)^{\frac{3}{2}}$. По (10) находим:

$$U = \iint\limits_{(G)} (25 - r^2)^{\frac{3}{2}} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_3^4 r\,(25 - r^2)^{\frac{3}{2}}\, dr = \int\limits_0^{\pi} -\frac{1}{5}\,(25 - r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_3^4 d\varphi =$$

$$= \frac{781}{5}\int\limits_0^{\pi} d\varphi = \frac{781}{5}\,\pi.$$

§ 68. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Объем тела. В § 63 было установлено, что объем цилиндрического тела (с. 271) выражается формулой

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, d\sigma \left(= \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx dy \right). \qquad (1)$$

*) В дальнейшем при разборе подобного рода примеров упоминание о непрерывности подынтегральной функции в области интегрирования D, как и упоминание о простоте D, в несложных случаях делаться не будет.

Заметим, что в (1) область D есть ортогональная проекция куска поверхности $z = f(x, y)$ на пл. xOy. Иногда же поверхность, ограничивающая тело, задается уравнением $y=\varphi(x, z)$ или $x = \psi(y, z)$, в таком случае проекция ее (область D_1) берется на плоскости xOz, соответственно yOz,в (1) при этом изменятся лишь обозначения переменных.

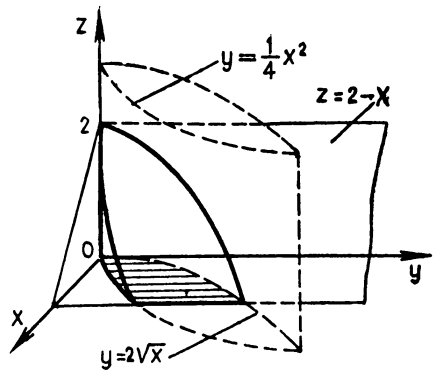


Рис. 52

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 2 - x, \quad z = 0, \quad y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2\sqrt{x}.$$

Решение. Область интегрирования ограничена на пл. xOy параболами $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 2\sqrt{x}$ и прямой $x = 2$ (по которой плоскость xOy пересекает плоскость $z = 2 - x$ (рис. 52)). Имеем:

$$V = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} (2 - x)\, dy = \int_0^2 \left(4\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right) dx =$$

$$= \frac{32\sqrt{2} - 5}{15} \text{ (куб. ед.)}.$$

Пример 2. Найти объем эллиптического параболоида $az = bx^2 + y^2$ ($a > 0$, $b > 0$) с высотой, равной c.

Решение. Тело ограничено данной поверхностью и плоскостью $z = c$. Проектируем его на плоскость yOz ($x = 0$). Так как тело симметрично относительно плоскостей yOz и xOz, то вычислим только часть его объема, лежащую в I октанте, и результат учетверим. Область интегрирования тогда будет ограничена параболой $y^2 = az$ и прямыми $z = c$, $y = 0$ на пл. yOz. Из уравнения параболоида при $x \geqslant 0$ следует: $x = \sqrt{\frac{az - y^2}{b}}$, и мы находим, интегрируя сначала по y, а затем по z:

$$V = 4\int_0^c dz \int_0^{\sqrt{az}} \sqrt{\frac{az - y^2}{b}}\, dy = \frac{4}{\sqrt{b}} \int_0^c dz \int_0^{\sqrt{az}} \sqrt{az - y^2}\, dy.$$

Полагая $y = \sqrt{az}\sin\varphi$, получим:

$$\int_0^{\sqrt{az}} \sqrt{az - y^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{az}\sqrt{1 - \sin^2\varphi}\sqrt{az}\cos\varphi\, d\varphi = az\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= az\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi az}{4}, \quad \text{поэтому } V = \frac{\pi a}{\sqrt{b}} \int_0^c z\, dz = \frac{\pi a c^2}{2\sqrt{b}}.$$

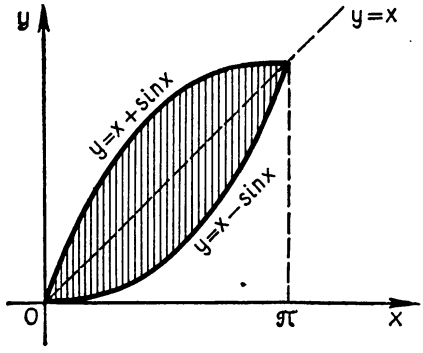


Рис. 53

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad y = x + \sin x,$$

$$y = x - \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Р е ш е н и е. Область интегрирования на пл. xOy — луночка (рис. 53). Кривые $y = x + \sin x$, $y = x - \sin x$ пересекаются в точках $x = 0$, $y = 0$ и $x = \pi$, $y = \pi$.

$$V = \int_0^{\pi} dx \int_{x-\sin x}^{x+\sin x} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{\pi} [(2x + \sin x)^3 - (2x - \sin x)^3]\, dx = 2\left(\pi^2 - \frac{35}{9}\right).$$

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$.

Р е ш е н и е. Введем замену переменных по формулам:

$$x = ar\cos^2\varphi, \quad y = br\sin^2\varphi \quad \left(r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Имеем отображение области D $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ пл. xOy на полуполосу G $(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, r \geqslant 0)$ плоскости $r\varphi$. Это отображение будет взаимно однозначным и непрерывным в области, где $x > 0$, $y > 0$. Найдем якобиан этого преобразования: $\frac{\partial x}{\partial r} = a\cos^2\varphi$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -ar\sin 2\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial r} = b\sin^2\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = br\sin 2\varphi$, тогда

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} a\cos^2\varphi & -ar\sin 2\varphi \\ b\sin^2\varphi & br\sin 2\varphi \end{vmatrix} = abr\sin 2\varphi;$$

он положителен в G при $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Координатные линии криволинейной системы координат на пл. xOy будут: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = r_0$ ($r_0 = \text{const}$) и $y = x\frac{b}{a}\operatorname{tg}^2\varphi_0$ ($\varphi_0 = \text{const}$), т. е. прямые для $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$; для значения $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем еще и координатную линию $x = 0$ $(y \geqslant 0)$. Заданная поверхность пересекает плоскость xOy по прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (ибо $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a > 0$, $b > 0$) и область D интегрирования (на пл. xOy) ограничена этой прямой и осями координат. Чтобы заполнить эту область криволинейной координатной сеткой $r\varphi$, надо r менять от 0 до 1, а φ — от 0 (на оси Ox) до $\frac{\pi}{2}$ (на оси Oy). Таким образом, D отображается на

плоскости $r\varphi$ в прямоугольник: $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Учитывая еще, что для заданной поверхности $z = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2} = c\sqrt{1-r^2}$, и, пользуясь формулой (9) § 67 (см. замечание на с. 294), имеем:

$$V = abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{abc}{3}.$$

2. Площадь плоской фигуры. В § 63 было установлено, что площадь плоской квадрируемой области (фигуры) выражается формулой:

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy, \tag{2}$$

или в полярных координатах (r, φ) (§ 67):

$$S = \iint\limits_{G} rdrd\varphi, \tag{2'}$$

где G — образ D на плоскости $r\varphi$.

Из (2), в частности, получается известная формула для площади криволинейной трапеции: если $y = f(x)$ — уравнение кривой, ограничивающей эту трапецию сверху ($f(x)$ — непрерывна), $f(x) \geqslant 0$, $x = a$ и $x = b$ — прямые, ограничивающие ее с боков, то по (12) § 66 имеем из (2):

$$S = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Точно так же из (2') вытекает выведенная в томе I (§ 109) формула $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi$ — для площади криволинейного сектора в полярных координатах.

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $a^2x^2 - b^2y^2 = x^4$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Р е ш е н и е. Не нарушая общности, можно считать, что $a > 0$, $b > 0$. Далее замечаем, что кривая симметрична координатным осям. Удобно перейти к полярным координатам, в которых уравнение кривой будет: $r^2\cos^4\varphi = a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi$. Лучи $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ не пересекают кривую ($b \neq 0$), и $\cos\varphi \neq 0$ в точках этой кривой, поэтому уравнение ее можно переписать и в такой форме:

$$r^2 = \frac{a^2 - b^2\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Так как $r^2 \geqslant 0$, то должно быть $a^2 - b^2\operatorname{tg}^2\varphi \geqslant 0$, откуда, ограничиваясь точками первой четверти, найдем: $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{a}{b}$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Для всех таких φ (а в первой четверти и только для таких φ) r^2 может быть найдено из уравнения как неотрицательное число, и в силу непрерывности функции $r = \sqrt{\frac{a^2 - b^2\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$ и симметричности кривой относительно координатных осей мы можем заключить (поскольку еще кривая пересекает обе эти оси), что она замкнута. Вычислим площадь, ограниченную этой кривой:

$$S = \int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2-b^2\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}}} r\,dr = 2\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} \frac{a^2 - b^2\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a^2 \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} -$$

$$- 2b^2 \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} \operatorname{tg}^2\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi) = \left(2a^2\operatorname{tg}\varphi - 2b^2\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} = \frac{4a^3}{3b}.$$

Пример 6. Найти площадь, ограниченную кривыми $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$ $(0 < a < b,\ 0 < m < n)$.

Р е ш е н и е. Уравнения первой и второй, третьей и четвертой кривых сходны — эти кривые принадлежат: первые две — семейству кривых $xy = u^2$, вторые две — семейству кривых $y^2 = vx$. Найдем соответствующее преобразование переменных x и y, решая относительно этих переменных систему из уравнений $xy = u^2$ и $y^2 = vx$. Получим: $x = u^{\frac{4}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$, $y = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$ $(u \neq 0,\ v \neq 0)$. Найдем якобиан этого преобразования.

$$I = \begin{vmatrix} \frac{4}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{4}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}uv^{-1}.$$

Чтобы заполнить область интегрирования координатной сетью, надо параметр u менять от a до b, а v — от m до n. Таким образом, по 7 (§ 67)

$$S = \iint\limits_{(G)} |I|\,du dv = \frac{2}{3}\int_a^b u\,du \int_m^n \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}(b^2 - a^2)\ln\frac{n}{m}.$$

3. Площадь поверхности. Если поверхность — не плоская, то еще неясно, что понимать под ее площадью. Рассмотрим этот вопрос для частного случая, когда поверхность задана с помощью явного уравнения:

$$z = f(x, y), \tag{3}$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой простой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. При этих предположениях поверхность (3) будет иметь в каждой своей точке касательную плоскость (см. § 44).

Чтобы дать определение площади поверхности, поступим следующим образом. Разобъем область D на частичные простые области $D_1, D_2, \ldots, D_n$; в пределах каждой частичной области D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ возьмем произвольным образом по точке (ξ_i, η_i) и восставим в ней перпендикуляр к плоскости xOy до пересечения в некоторой точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ с поверхностью (3). Проведем в полученной точке M_i касательную плоскость к поверхности (рис. 54). Построив на D_i цилиндрическую поверхность с направляющей Γ_i (Γ_i — контур области D_i) и с образующей, параллельной оси Oz, мы вырежем как на самой поверхности, так и на проведенной касательной плоскости элементарные участки, которые обозначим соответственно через G_i и G_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

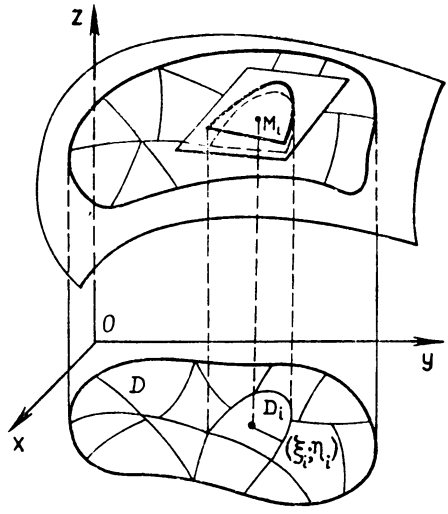


Рис. 54

Интуитивные соображения подсказывают нам, что при малом диаметре частичной области D_i (а значит, и малом диаметре частей G_i) участки G_i' на касательной плоскости имитируют участки G_i самой поверхности (3), и потому естественно сумму площадей участков G_i' принять за приближенную меру площади поверхности (3), а если эта сумма имеет при $\lambda \to 0$ (где λ — наибольший диаметр областей D_i) предел, не зависящий от способа разбиения области D и выбора точек (ξ_i, η_i) в D_i, то естественно этот предел принять за площадь S поверхности (3). Докажем, что этот предел (ср. т. I, с. 474) при сделанных допущениях о $f(x, y)$ существует, и вычислим его.

Пусть касательная плоскость в выбранной точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ образует с плоскостью xOy угол γ_i. Так как направляющий вектор $\vec{n}_0$ нормали к этой плоскости имеет координаты $f_x'(\xi_i, \eta_i)$, $f_y'(\xi_i, \eta_i)$, -1 (см. § 44), то, как известно из аналитической геометрии,

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Но между площадями $\Delta S_i'$ и $\Delta\sigma_i$ ($\Delta\sigma_i$ — площадь области D_i, а $\Delta S_i'$ — площадь области G_i') $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существует соотношение

$$\Delta\sigma_i = \Delta S_i' \cos\gamma_i. \qquad (4)$$

Для многоугольников соотношение (4) доказывается в элементарной геометрии. Исходя из этого, докажем, что квадрируемость области D_i влечет и квадрируемость области G_i', причем и здесь выполняется соотношение (4).

Пусть $\varepsilon > 0$ наперед задано. Опишем около D_i и впишем в D_i такие многоугольные области P_i и $\overline{P}_i$, что для их площадей Q_i и $\overline{Q}_i$ будет: $Q_i - \overline{Q}_i < \varepsilon \cos\gamma_i$ (области D_i — квадрируемы; $i = 1, 2, \ldots, n$). Продолжив построенную на Γ_i цилиндрическую поверхность на границу многоугольника P_i, а также построив цилиндрическую поверхность (с образующей, параллельной Oz) на направляющей, являющейся границей многоугольника $\overline{P}_i$, мы получим описанные около G_i' и вписанные в нее многоугольные области N_i и $\overline{N}_i$ (с площадями Q_i' и $\overline{Q}_i'$), проектирующиеся на пл. xOy в области P_i и $\overline{P}_i$, так что $Q_i = Q_i' \cos\gamma_i$, $\overline{Q}_i = \overline{Q}_i' \cos\gamma_i$, откуда $Q_i' - \overline{Q}_i' < \dfrac{Q_i - \overline{Q}_i}{\cos\gamma_i} < \varepsilon$. Но в силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что фигура G_i' квадрируема (§ 65); обозначим ее площадь через $\Delta S_i'$. Тогда окажется, что $\overline{Q}_i' \leqslant \Delta S_i' \leqslant Q_i'$, откуда $\overline{Q}_i \leqslant \Delta S_i' \cos\gamma_i \leqslant Q_i$. Но и $\overline{Q}_i \leqslant \Delta\sigma_i \leqslant Q_i$, и, значит, $|\Delta\sigma_i - \Delta S_i' \cos\gamma_i| \leqslant Q_i - \overline{Q}_i < \varepsilon \cos\gamma_i \leqslant \varepsilon$, что ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ и доказывает нужное равенство (4). Далее из (4) находим:

$$\Delta S_i' = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta\sigma_i,$$

и потому

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i' = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\ \Delta\sigma_i.$$

Правая часть последнего равенства есть интегральная сумма для непрерывной в D функции $\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} = F(x, y)$, и потому эта сумма, а с ней и $\sum_n$ имеет при $\lambda \to 0$ предел, который равен соответствующему двойному интегралу от $F(x, y)$. Таким образом, поверхность (3), действительно, оказывается здесь квадрируемой, причем для ее площади $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_n$ имеем соотношение:

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, d\sigma,$$

или, обозначая $f_x'(x, y) = p$, $f_y'(x, y) = q$, соотношение:

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma. \qquad (5)$$

Пример 7. Найти часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенную внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$.

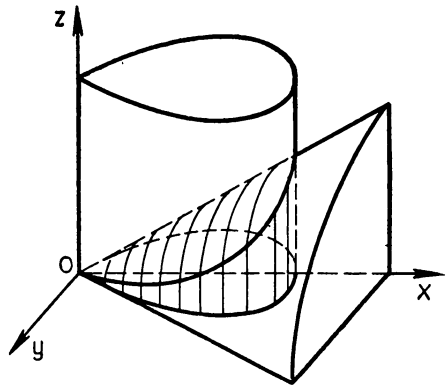


Рис. 55

Р е ш е н и е. Основанием цилиндра на пл. xOy служит лемниската, полярное уравнение которой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. Обе поверхности расположены симметрично относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$, поэтому достаточно рассмотреть часть искомой поверхности, лежащую в первом октанте*), тогда областью интегрирования D будет служить часть петли лемнискаты, лежащая в I четверти (рис. 55): $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Так как функции $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$ непрерывны, кроме как для $z = 0$ (а точка O (0, 0, 0) может не браться в расчет), то

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}}{z} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

и по (5) имеем:

$$S = 4\iint\limits_{(D)} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$S = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{a^2\cos 2\varphi}} \frac{r\sqrt{2}\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos 2\varphi}}\, rdr = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, r^2 \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Полагая $\sqrt{2}\sin\varphi = t$, найдем, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{4} \text{ и } S = 2a^2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

*) Мы считаем интуитивно ясным, что если поверхность состоит из нескольких квадрируемых частей, то она квадрируема и площадь ее равна сумме площадей этих частей.

4. Масса материальной фигуры. В § 63 была выведена формула для массы M материальной фигуры (пластинки) D:

$$M = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)dxdy. \tag{6}$$

Пример 8. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = b^2$ $(b > a > 0)$. Зная, что плотность материала кольца в данной точке обратно пропорциональна расстоянию этой точки от общего центра O этих окружностей, найти массу кольца (плотность на окружности внутреннего круга равна 1 $г/см^3$).

Решение. Здесь $\delta(x, y) = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ где, k — коэффициент пропорциональности. По условию при $r=a$ $\delta=1$, так что $k = a$ и $\delta(x, y) = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$. В области интегрирования (кольце D) $\delta(x, y)$—непрерывная функция, и потому формула (6) применима. Находим:

$$M = \iint\limits_{(D)} \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy.$$

В полярных координатах уравнения линий, ограничивающих кольцо, будут: $r = a$ и $r = b$, причем $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Поэтому

$$M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b \frac{a}{r}\, rdrd\varphi = 2\pi a(b - a).$$

5. Центр тяжести плоской фигуры. Пользуясь понятием двойного интеграла, обобщим выведенные в томе I, § 124 формулы для центра тяжести криволинейной трапеции на случай любой материальной плоской фигуры, представляющей собой простую область D.

Пусть в каждой точке (x, y) этой фигуры задана плотность $\delta(x, y)$ (мы будем считать ее непрерывной в D функцией). Исходя из той же имитации формул для центра тяжести системы из n материальных точек, что и в т. I, мы разобьем область D на простые частичные области D_i с площадями $\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, взяв в пределах каждой частичной области по точке (ξ_i, η_i), составим дроби:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \delta(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \delta(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i}.$$

Естественно за центр тяжести C фигуры D считать точку, координаты которой X_C, Y_C являются пределами составленных дробей при условии, что $\lambda \to 0$ (λ — наибольший из диаметров частичных областей D_i). Так как члены этих дробей суть интегральные суммы на D соответственно для непрерывных функций $\delta(x, y)$, $x\delta(x, y)$ и $y\delta(x, y)$, то, переходя в записанных выше равенствах

к пределу при $\lambda \to 0$, получим искомые формулы координат центра тяжести:

$$X_G = \frac{\iint\limits_{(D)} x\delta(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\,dxdy}, \quad Y_C = \frac{\iint\limits_{(D)} y\delta(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\,dxdy}, \tag{7}$$

где в знаменателе стоит выражение для массы M фигуры D (см. (6)).

В случае $\delta = \text{const}$ эти формулы примут вид:

$$X_C = \frac{\iint\limits_{(D)} xdxdy}{S}, \quad Y_G = \frac{\iint\limits_{(D)} ydxdy}{S}, \tag{8}$$

где S — площадь фигуры D.

Числители дробей в (7), (8) обычно именуются статическими моментами M_x и M_y фигуры D.

Пример 9. Найти координаты центра тяжести верхнего полукольца из примера 8.

Р е ш е н и е. Ищем статические моменты M_x и M_y фигуры (переходя в соответствующих двойных интегралах к полярным координатам):

$$M_x = \iint\limits_{(D)} \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = a\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_a^b r\cos\varphi\,dr = \frac{a}{2}(b^2-a^2)\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0,$$

$$M_y = \iint\limits_{(D)} \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = a\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_a^b r\sin\varphi\,d\varphi = \frac{a}{2}(b^2-a^2)\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= a(b^2-a^2).$$

Масса всего кольца есть $2\pi a(b-a)$ (пример 8), откуда масса полукольца $M_1 = \pi a(b-a)$, и по (7) получаем:

$$X_C = \frac{M_x}{M_1} = 0, \quad Y_C = \frac{M_y}{M_1} = \frac{a(b^2-a^2)}{\pi a(b-a)} = \frac{a+b}{\pi}, \quad C\left(0, \frac{a+b}{\pi}\right).$$

(Что $X_C = 0$, можно было предвидеть заранее, исходя из соображений симметрии.)

§ 69. ПОНЯТИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Основные понятия. Аналогично тому как было введено выше на квадрируемых двумерных областях понятие двойного интеграла, в трехмерном пространстве можно ввести понятие тройного интеграла по кубируемой области.

Пусть в некоторой кубируемой замкнутой пространственной области T (с объемом V) определена ограниченная функция трех переменных $f(x, y, z)$. Разобьем T на кубируемые части T_i (без общих внутренних точек) с объемами Δv_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Выбрав в каждой из частичных областей T_i по точке $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, вычис-

лим значения $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ данной функции в этих точках и составим сумму

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

(интегральная сумма функции $f(x, y, z)$ по области T).

Определение. *Если интегральная сумма $\sum_n$ стремится к некоторому пределу U, когда наибольший диаметр d частичных областей T_i стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения области T на частичные области T_i, ни от выбора точек P_i в этих областях, то говорят, что функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области T, а сам предел U называют тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначают символом: $\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)dv$. Область T называют при этом областью интегрирования для $f(x, y, z)$.*

Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла (§ 64); доказывать их мы не будем.

Доказывается, что если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в данной кубируемой замкнутой ограниченной области T, то она имеет в этой области тройной интеграл (интегрируема).

Замечание. В случае, когда в области T дана функция $f(x, y, z) = 1$, интегральная сумма для $f(x, y, z)$ равна объему V тела: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta v_i = V$, а потому и ее предел равен V:

$$\iiint\limits_{(T)} dv = V.$$

2. Вычисление тройного интеграла. Пусть вначале областью интегрирования T служит параллелепипед, заданный неравенствами: $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$; $e \leqslant z \leqslant h$ (очевидно, он проектируется на пл. xOy в прямоугольник D: $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$. Тогда, если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в данном параллелепипеде, функция $\Phi(x, y) = \int\limits_e^h f(x, y, z)\, dz$ существует и непрерывна в D и имеет место следующая формула:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dv = \iint\limits_{(D)} \Phi(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{(D)} \left\{ \int_e^h f(x, y, z)\, dz \right\} dxdy. \quad (1)$$

Здесь интеграл $\iint\limits_{(D)} \left\{ \int_e^h f(x, y, z)dz \right\} dxdy$ называют повторным; его

обычно записывают так:

$$\iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{e}^{h} f(x, y, z)dz.$$

Доказательство высказанного утверждения аналогично доказательству соответствующей теоремы о двойном интеграле (§ 66).

Ко второму интегралу из (1) применима формула (8) § 66 ($\Phi(x,y)$ функция, непрерывная в D):

$$\iint\limits_{(D)} \Phi(x, y)\, dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} \Phi(x, y)\, dy,$$

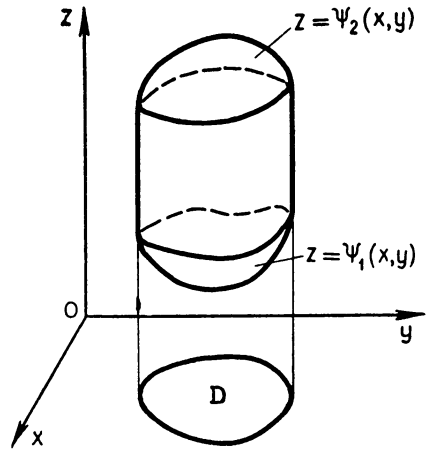


Рис. 56

поэтому формулу (1) можно переписать так (учитывая выражение для $\Phi(x, y)$):

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dv = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{e}^{h} f(x, y, z)\, dz. \qquad (2)$$

Выражение, стоящее в правой части, называется трехкратным интегралом; формула (2) и сводит вычисление тройного интеграла (по параллелепипеду) к вычислению трехкратного интеграла, т. е. к последовательному вычислению трех обыкновенных интегралов.

Аналогично могут быть получены формулы:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dv = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{e}^{h} dz \int\limits_{a}^{b} f(x, y, z)\, dx,$$

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dv = \int\limits_{e}^{h} dz \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x, y, z)\, dx$$

и им подобные.

Пусть теперь область интегрирования T есть криволинейная область, причем специального типа: область T ограничена: снизу — поверхностью с уравнением $z = \psi_1(x, y)$, сверху — поверхностью с уравнением $z = \psi_2(x, y)$, с боков — цилиндрической поверхностью (рис. 56) (в частных случаях цилиндрическая поверхность может и стягиваться в линию), причем область T (такую область будем называть цилиндроидальной) проектируется на пл. xOy в некоторую квадрируемую область D, она, очевидно, будет областью определения для функций $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ ($\psi_2(x, y) \geqslant \psi_1(x, y)$ в D). Тогда, если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области T, функция $\Phi(x, y) = \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ существует и непрерывна

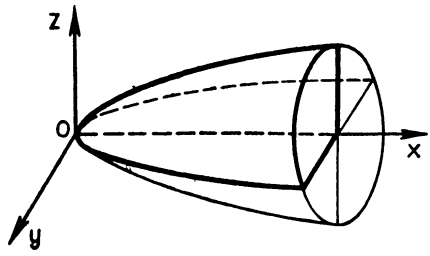


Рис. 57

в D, и имеет место следующая формула для вычисления тройного интеграла:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,\ y,\ z)\,dv = \iint\limits_{(D)} \Phi(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{\psi_1(x,\ y)}^{\psi_2(x,\ y)} f(x, y, z)\,dz. \quad (3)$$

Если, далее, область D — простейшая область I типа (§ 66), ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)$ на $[a, b]$, то к $\Phi(x, y)$ применима формула (12) § 66 и формула (3) может быть преобразована к виду:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,\ y,\ z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,\ y)}^{\psi_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz. \quad (4)$$

Разумеется, если область D — простейшая область II типа, то мы можем $\iint\limits_{(D)} \Phi(x, y)\,dxdy$ выразить по формуле (12′) § 66 и переписать (3) соответствующим образом. Точно так же при определенных условиях в (3) можно начать интегрирование не с переменного z, а с y или x.

Замечание. Как и при вычислении двойного интеграла, здесь вместо dv часто пишут под знаком тройного интеграла символ $dxdydz$ («элемент объема» в прямоугольных координатах).

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_{(T)} xdxdydz$, где область T ограничена частью параболоида $y^2 + az^2 = bx$ $(a > 0,\ b > 0)$, находящейся в первом октанте, координатными плоскостями и плоскостью $x = c$ $(c > 0)$.

Решение. Из уравнения параболоида при $z > 0$ находим: $z = \sqrt{\dfrac{bx - y^2}{a}}$; из этого же уравнения при $z = 0$ получаем: $y^2 = bx$; $y = \sqrt{bx}$ $(y \geqslant 0)$. Таким образом, область D, в которую проектируется тело T, есть параболический полусегмент, ограниченный частью параболы $y = \sqrt{bx}$, осью Ox и прямой $x = c$ (рис. 57). Применяем формулу (4):

$$I = \int\limits_0^c dx \int\limits_0^{\sqrt{bx}} dy \int\limits_0^{\sqrt{\frac{bx - y^2}{a}}} xdz = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_0^c xdx \int\limits_0^{\sqrt{bx}} \sqrt{bx - y^2}\,dy.$$

Полагая во внутреннем интеграле $y = \sqrt{bx}\sin\varphi$, мы найдем:

$$\int\limits_0^{\sqrt{bx}} \sqrt{bx - y^2}\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{bx}\sqrt{bx}\cos^2\varphi\,d\varphi = bx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{\pi bx}{4},$$

и поэтому

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^c \frac{\pi b x^2}{4}\, dx = \frac{\pi b c^3}{12\sqrt{a}}.$$

3. Замена переменных под знаком тройного интеграла. Как и на плоскости, в пространстве можно рассматривать взаимно однозначное отображение одной области на другую. Пусть даны два (евклидовых) трехмерных пространства E и E', одно из которых отнесено к системе прямоугольных координат x, y, z, а другое — к системе прямоугольных координат u, v, w, и пусть между точками двух замкнутых областей $T' \subset E'$ и $T \subset E$, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями (S и S') (с. 267), установлено взаимно однозначное соответствие с помощью системы функций:

$$x = \varphi_1(u, v, w), \quad y = \varphi_2(u, v, w), \quad z = \varphi_3(u, v, w), \tag{5}$$

причем обратное преобразование определяется системой функций:

$$u = \bar{\varphi}_1(x, y, z), \quad v = \bar{\varphi}_2(x, y, z), \quad w = \bar{\varphi}_3(x, y, z), \tag{5'}$$

где все функции из (5) и (5') имеют непрерывные частные производные первого порядка.

При таком преобразовании точки границы S' (S) области T' (T) преобразуются также в точки границы S (S') области T (T') и вообще кусочно-гладкая поверхность, лежащая в T' (T), преобразуется снова в кусочно-гладкую поверхность области T (T').

Как и в § 67, здесь можно рассматривать u, v, w из (5) как криволинейные координаты точки из области T пространства E.

Уравнение $u = u_0$ (const) определяет в области T пространства E некоторую поверхность $\bar{\varphi}_1(x, y, z) = u_0$, а при меняющемся u — семейство криволинейных координатных поверхностей пространства xyz. Точно так же уравнения $\bar{\varphi}_2(x, y, z) = v$ и $\bar{\varphi}_3(x, y, z) = w$ применяющихся v и w дают еще два семейства криволинейных координатных поверхностей этого пространства.

В качестве примеров криволинейных координат в пространстве мы рассмотрим здесь цилиндрические и сферические координаты.

а) Цилиндрические координаты. Если мы на плоскости xOy введем вместо декартовых координат x, y точки $M(x, y, z)$ полярные координаты r, φ, оставив аппликату z этой точки без изменения (рис. 58), то получим так называемые цилиндрические координаты r, φ, z точки M; они определяются, таким образом, преобразованием, задаваемым соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z \quad (r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty). \tag{6}$$

Соответствующие семейства координатных поверхностей здесь будут: 1) $r = r_0$ (const) — круговые цилиндры $x^2 + y^2 = r_0^2$, образующие которых параллельны оси Oz; 2) $\varphi = \varphi_0$ (const) — все-

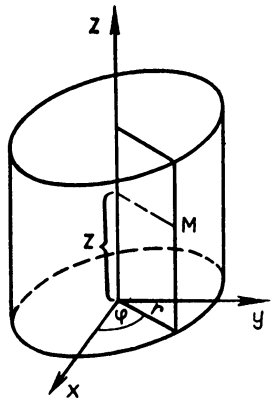


Рис. 58

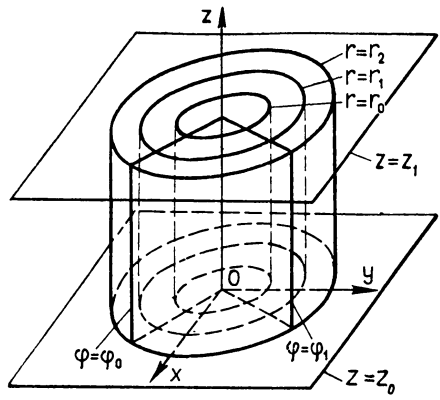


Рис. 59

возможные полуплоскости, проходящие через ось Oz; при $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ они определяются уравнениями вида $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$; 3) $z = z_0$ — плоскости, параллельные пл. xOy (рис. 59).

Соответствие, определяемое формулами (6), переводит область T' ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$) пространства $r\varphi z$ во все пространство $xyz(E)$ и будет взаимно однозначным в любой области, не содержащей точек оси Oz.

Якобиан, соответствующий преобразованию (6), будет:

$$I(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \qquad (7)$$

б) Сферические координаты. Положение точки M в пространстве можно определить (имея уже декартову систему прямоугольных координат xyz), задавая расстояние r этой точки от начала координат ($0 \leqslant r < +\infty$), угол φ между радиус-вектором OM и положительным направлением оси Oz ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) и угол θ между проекцией OM_1, радиус-вектора OM на пл. xOy и положительным направлением оси Ox ($0 \leqslant 0 < 2\pi$) (рис. 60). Координаты r, φ, θ называются сферическими координатами точки M.

Установим связь между декартовыми координатами x, y, z точки M и ее сферическими координатами. Прежде всего (см. рис. 60) $z = OM\cos\varphi = r\cos\varphi$; далее, $x = OM_1\cos\theta$, $y = OM_1\sin\theta$, где $OM_1 = OM\sin\varphi = r\sin\varphi$. Отсюда

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi \qquad (8)$$

— формулы принятого преобразования точек пространственной полосы ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$) пространства E' ($r\varphi\theta$) на все пространство E (xyz).

Здесь, как это следует из (8), семейства координатных поверх-

ностей будут: 1) $r = r_0$ — сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ $(0 \leqslant r_0 < +\infty)$; 2) $\varphi = \varphi_0$ — полуконусы $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \left(0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi;\ \varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 61) (при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ они вырождаются в плоскость $z = 0$, а при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ «стягиваются» в положительный (отрицательный) луч оси Oz; 3) $\theta = \theta_0$ — полуплоскости $y = x \operatorname{tg} \theta_0$ $\left(0 \leqslant \theta_0 < 2\pi;\ \theta_0 \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, проходящие через ось Oz, вместе с полуплоскостями $x = 0$, $y \geqslant 0$ и $x = 0$, $y < 0$.

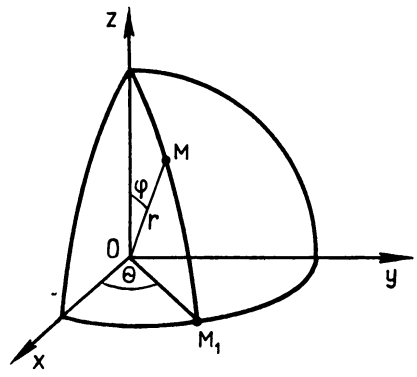


Рис. 60

При отображении (8) имеем нарушение взаимно однозначного соответствия для точек оси Oz.

Вычислим якобиан преобразования (8):

$$I(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} \cos\varphi + \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} r\sin\varphi,$$

$$I(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\varphi. \quad (9)$$

Очевидно, $I(r, \varphi, \theta) \geqslant 0$ и равно нулю лишь при $\varphi = 0$, π или при $r = 0$.

Можно получить следующую формулу элемента объема в криволинейных координатах:

$$dV = |I(u, v, w)|\,du\,dv\,dw, \quad (10)$$

из которой для объема данной области T через интеграл в координатах u, v, w получаем следующее выражение:

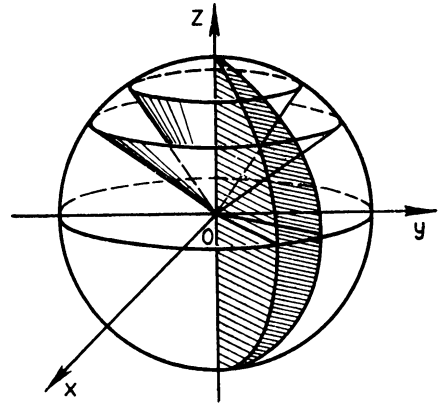


Рис. 61

$$V = \iiint\limits_{(T')} |I(u, v, w)|\, du\, dv\, dw, \qquad (11)$$

где T' — замкнутая область, на которую отображается область T преобразованием (5′). Эта формула сохраняет силу и в том случае, когда взаимно однозначное соответствие между T и T' нарушается в отдельных точках или вдоль отдельных линий или поверхностей меры нуль из области T.

Согласно (7) формула (11) для цилиндрических координат примет вид:

$$V = \iiint\limits_{(T')} r\, dr\, d\varphi\, dz,$$

а для сферических согласно (9)

$$V = \iiint\limits_{(T')} r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

При указанных ограничениях (с. 293) мы можем из (11) (ср. с формулой (7) из § 67) получить формулу замены переменных под знаком тройного интеграла:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{(T')} f[\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)]|I(u, v, w)|\, du\, dv\, dw. \qquad (12)$$

Отсюда для цилиндрических и сферических координат найдем соответственно:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(T')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz, \qquad (12')$$

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{(T')} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta. \qquad (12'')$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $U = \iiint\limits_{(T)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, где T — верхняя часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, отсекаемая плоскостью xOy (так что $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$).

Р е ш е н и е. Здесь удобно перейти к цилиндрическим координатам (6). По формуле (12′) данный интеграл тогда выразится так:

$$\iiint\limits_{(T)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(T')} r^3\, dr\, d\varphi\, dz. \qquad (*)$$

Область T' в пространстве $r\varphi z$ будет ограничена цилиндрической поверхностью $r^2 + z^2 = R^2$ $(r \geqslant 0)$, которая пересекает плоскость $r\varphi$ $(z = 0)$ по прямым $r = \pm R$ (мы берем лишь $r = R$, ибо $r \geqslant 0$). Кроме того, должно быть: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Таким образом, область T' проектируется на пл. $r\varphi$ в прямоугольную область D': $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Область T',

следовательно, ограничена: снизу плоскостью $z = 0$, сверху — поверхностью $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, с боков — плоскостями $r = 0$, $r = R$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$.

Применяем к интегралу из (*) формулу (4), меняя в ней y на r и x на φ, найдем:

$$U = \iiint\limits_{(T')} r^3\, dr\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3\, dr \int\limits_0^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr = 2\pi \int\limits_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr.$$

Вычисляя этот интеграл по частям ($r^2 = u$, $r\sqrt{R^2 - r^2}dr = dv$), получим:

$$U = \frac{4\pi}{15} R^5.$$

Пример 3. Вычислить $\iiint\limits_{(T)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, где T есть область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geqslant 0$) (общая часть).

Р е ш е н и е. Наличие трехчлена $x^2 + y^2 + z^2$ подсказывает здесь целесообразность перехода к сферическим координатам (см. п. 3). Уравнение шаровой поверхности в этих координатах примет вид: $r^2 = R^2$, т. е. $r = R$, а уравнение поверхности полуконуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (здесь $z \geqslant 0$) будет: $r\cos\varphi = r\sin\varphi$ (так как $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\varphi$, $r \geqslant 0$, $\sin\varphi \geqslant 0$), откуда для $r \neq 0$ $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Для внутренних к этому конусу точек шара имеем: $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ и, значит, $\operatorname{tg}\varphi \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Так как параметр θ при этом ничем не ограничен, кроме своих естественных ограничений, то границы изменения параметра θ будут: $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Область T' в пространстве $r\varphi\theta$, таким образом, задается неравенствами: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Применение формулы (12″) дает:

$$U = \iiint\limits_{(T)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(T')} r^2 r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

Интеграл, стоящий справа, вычислим по формуле (2) (с соответствующей заменой обозначений), интегрируя сначала по r, а затем по φ и, наконец, по θ:

$$U = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r^4 \sin\varphi\, dr.$$

Так как пределы интегрирования постоянны, а $f(r, \varphi) = f_1(r) \cdot f_2(\varphi) = r^4 \cdot \sin\varphi$, то записанный тройной интеграл равен произведению трех однократных интегралов.

$$U = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \cdot \int\limits_0^R r^4\, dr = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{R^5}{5} = \frac{\pi R^5}{5}(2 - \sqrt{2}).$$

4. Понятие о некоторых приложениях тройного интеграла. Выше (см. п. 1 и п. 3) уже говорилось о выражении объема тела через тройной интеграл.

С помощью тройного интеграла можно также находить массу тела T, представляющего собой (геометрически) замкнутую кубируемую область.

Пусть плотность данного материального тела T в его точке $P(x, y, z)$ есть некоторая функция $\delta(x, y, z)$ от координат этой точки; будем предполагать ее здесь непрерывной в области T. Тогда, рассуждая так же, как и в § 63 (п. 1а), мы придем к следующей формуле для массы M данного тела T:

$$M = \iiint\limits_{(T)} \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{13}$$

Далее, можно с помощью тройного интеграла находить центры тяжести тел. Из соображений, вполне аналогичных тем, которые были высказаны в § 68, п. 5, выводятся следующие формулы для координат x_C, y_C, z_C центра тяжести C материального тела T с плотностью $\delta(x, y, z)$ и массой M:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint\limits_{(T)} x\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M}, \\ y_C &= \frac{\iiint\limits_{(T)} y\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M}, \\ z_C &= \frac{\iiint\limits_{(T)} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M}. \end{aligned} \tag{14}$$

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3xyz \quad (a > 0).$$

Р е ш е н и е. Так как должно быть: $xyz \geqslant 0$, то тело расположено в I, III, VI и VIII октантах, причем оно симметрично относительно координатных осей (например, одновременная смена x на $-x$ и y на $-y$ (при неизменном z) не меняет уравнения — симметрия относительно оси Oz).

Введем сферические координаты. Тогда граница данного тела будет иметь (после упрощений) уравнение:

$$r = a\sqrt[3]{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}.$$

Таким образом, (с. 310),

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4}{3}a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}a^3\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{a^3}{6}.$$

Пример 5. Найти массу тела T, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, плоскостью $z = 0$ и цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность в каждой его точке численно равна расстоянию этой точки до оси Oz.

Р е ш е н и е. По условию $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $M = \iiint\limits_{(T)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$. Перейдем к цилиндрическим координатам: $M = \iiint\limits_{(T')} r^2 dr\, d\varphi\, dz$.

Уравнения границы тела будут: сверху $z = r$, снизу $z = 0$, а уравнение границы проекции тела на пл. xOy $r = a$.

В силу симметрии тела относительно плоскостей xOz и yOz получим:

$$M = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 dr \int_0^r dz = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Пример 6. Найти координаты центра тяжести однородного параболоида $x^2 + az^2 = by$ высоты h ($a > 0$, $b > 0$).

Р е ш е н и е. Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести рассматриваемого тела лежит на оси Oy, поэтому $x_C = 0 = z_C$. Остается вычислить y_C. Так как тело однородно (примем $\delta = 1$), то $M = V$ и по (14) имеем:

$$y_C = \frac{\iiint\limits_{(T)} y\, dx\, dy\, dz}{V},$$

где $V = \iiint\limits_{(T)} dx\, dy\, dz$ — объем параболоида.

Из уравнения границы этого параболоида находим: $z = \pm \sqrt{\frac{by - x^2}{a}}$. Граница области D, в которую проектируется тело на пл. xOy, будет задана уравнением $x^2 = by$; уравнение секущей плоскости $y = h$. Отсюда

$$V = 4 \int_0^h dy \int_0^{\sqrt{by}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{by - x^2}{a}}} dz = \frac{4}{\sqrt{a}} \int_0^h dy \int_0^{\sqrt{by}} \sqrt{by - x^2}\, dx = \frac{\pi b h^2}{2\sqrt{a}}$$

(см. пример 2 на с. 295). Далее,

$$U = \iiint\limits_{(T)} y\, dx\, dy\, dz = 4 \int_0^h y\, dy \int_0^{\sqrt{by}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{by - x^2}{a}}} dz = \frac{4}{\sqrt{a}} \int_0^h y \frac{\pi b y}{4}\, dy = \frac{\pi b h^3}{3\sqrt{a}}.$$

Таким образом,

$$y_C = \frac{U}{V} = \frac{\frac{\pi b h^3}{3\sqrt{a}}}{\frac{\pi b h^2}{2\sqrt{a}}} = \frac{2}{3} h, \quad C\left(0;\ \frac{2}{3} h;\ 0\right).$$

ГЛАВА XI.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе будет рассмотрено еще одно важное обобщение понятия определенного интеграла на функции нескольких переменных — понятие криволинейного интеграла. К этому понятию приводит ряд задач из различных областей знаний; рассмотрим одну из таких задач.

§ 70. ЗАДАЧА О РАБОТЕ ПЛОСКОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть на координатной плоскости xOy дана некоторая замкнутая область D, представляющая собой материальную фигуру (т. I, § 114), и пусть с каждой точкой $M(x, y)$ области D связан определенный вектор $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ (величина и направление которого, таким образом, зависят от координат точки M), представляющий силу, действующую на находящуюся в M массу. В таком случае говорят, что в области D задано *плоское силовое поле* $\vec{F}(x, y)$.

Пусть, далее, под действием сил поля материальная точка движется по некоторой спрямляемой кривой L, расположенной в области D (рис. 62), и требуется вычислить работу A данного силового поля при перемещении материальной точки по линии L из точки B в точку C. Для решения поставленной задачи разобьем дугу BC произвольным образом на некоторое число n частей с помощью точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, располагающихся в направлении от точки B к точке C*). Для единообразия записи обозначим начальную точку B через M_0, а конечную точку C — через M_n. Дуги $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть частичными дугами. Координаты точек деления M_k обозначим через x_k и y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Впишем в дугу BC ломаную, соединяя прямолинейными отрезками каждые две соседние точки M_{k-1} и M_k. На каждой частичной дуге

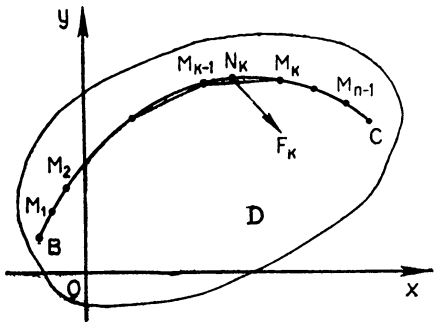


Рис. 62

*) См. сноску на с. 316.

$M_{k-1}M_k$ возьмем произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$; величину силы $\vec{F}$ в точке N_k обозначим через $\vec{F}_k$. Если допустить, что участок пути BC от точки M_{k-1} до точки M_k прямолинейный (т. е. если допустить, что дуга $M_{k-1}M_k$ заменена хордой $M_{k-1}M_k$) и что на всем этом участке действует постоянная (по величине и по направлению) сила, скажем, равная значению $\vec{F}_k$ силы $\vec{F}$ в точке N_k, то работа ΔA_k силы $\vec{F}_k$ на прямолинейном участке $M_{k-1}M_k$ выразится согласно известной формуле следующим образом:

$$\Delta A_k = |\vec{F}_k| \, |\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| \cos \varphi_k, \qquad (1)$$

где $|\vec{F}_k|$ — длина вектора $\vec{F}_k$; $|\overrightarrow{M_{k-1}M_k}|$ — длина вектора $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$, а φ_k — угол между векторами $\vec{F}_k$ и $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$, представляющими соответственно направление силы и направление пути.

При переходе от одной точки области D к другой сила $\vec{F}$, вообще говоря, меняется. При этом, поскольку каждой точке (x, y) дуги BC соответствует свое определенное значение силы $\vec{F}$, а значит, и ее проекций на координатные оси, то и эти проекции будут некоторыми функциями от координат x и y рассматриваемой точки M. Обозначим эти проекции соответственно через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Тогда $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$, и, следовательно,

$$\vec{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\,\vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\,\vec{j}, \qquad (2)$$

где i и j — орты координатных осей.

Так как проекции вектора $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ на оси Ox и Oy соответственно равны $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ и $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, то

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}. \qquad (3)$$

Правая часть равенства (1) представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{F}_k$ и $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$: $\Delta A_k = \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}$, которое равно сумме произведений одноименных координат этих векторов. Отсюда с учетом (2) и (3) имеем:

$$\Delta A_k = P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k.$$

Если мы примем, как это представляется естественным, что работа A сил поля $\vec{F}(x, y)$ вдоль дуги BC равна сумме всех «элементарных» работ, соответствующих отдельным частичным дугам $M_{k-1}M_k$, то для работы A_n, которую произвело бы при этом предположении силовое поле $\vec{F}(x, y)$ по ломаной $M_0M_1M_2 \ldots M_n$, мы будем иметь выражение:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k]. \qquad (4)$$

Хотя величина A_n, вообще говоря, и не является «истинной работой» сил поля при перемещении материальной точки по дуге BC,

естественно ожидать, что сумма A_n будет тем точнее выражать предполагаемую работу A силового поля $\vec{F}(x, y)$, чем меньше будут длины частичных дуг $M_{k-1}M_k$. Будем теперь неограниченно увеличивать число n делений дуги BC и притом так, чтобы λ — наибольшая из длин частичных дуг $M_{k-1}M_k$ стремилась к нулю. Тогда работа A_n, определяемая по формуле (4), вообще говоря, будет изменяться. Если при этом она будет стремиться к определенному пределу A, не зависящему от выбранной системы разбиений дуги BC точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и от выбора точек $N_k(\xi_k; \eta_k)$ на частичных дугах $M_{k-1}M_k$, то этот предел A мы и примем (как это представляется естественным) за *работу* данного *силового поля* $\vec{F}(x, y)$ при перемещении материальной точки по дуге BC от точки B до точки C. То, что A есть предел суммы (4), будем записывать так:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} A_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k].$$

Итак, если мы составим сумму вида (4) и найдем ее предел при $\lambda \to 0$, то число A и будет выражать работу сил поля $\vec{F}(x, y)$ вдоль дуги BC от точки B до точки C.

В тех случаях, когда $Q(x, y) \equiv 0$ или $P(x, y) \equiv 0$, вместо суммы (4) мы имеем соответственно суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k. \tag{5}$$

К вычислению пределов сумм вида (4) и (5) приводит решение и большого числа других важных задач теоретического и прикладного характера. Поэтому возникает необходимость изучить подобные суммы в общем виде, отвлекаясь от их конкретного содержания, и установить удобные на практике способы вычисления пределов этих сумм.

§ 71. ПОНЯТИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА (ПО КООРДИНАТАМ)

Пусть вдоль некоторой спрямляемой кривой AB, лежащей в плоской области (или плоской замкнутой области) (рис. 63), определена функция $P(x, y)$ двух переменных x и y. Это означает, что каждой точке $M(x_0, y_0)$ на кривой AB ставится в соответствие определенное значение $P(x_0, y_0)$ функции $P(x, y)$. Разобьем дугу AB на n частичных дуг с помощью произвольно выбранных на ней точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$, располагающихся в направлении от точки A к точке B*). Для единообразия записи снова положим

*) Указание на направление от A к B дано для незамкнутой дуги; о направлении на замкнутой дуге см. с. 323.

$A \equiv M_0$ и $B \equiv M_n$. Обозначив, далее, через x_k и y_k координаты точек M_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) и взяв на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) произвольно точку N_k (ξ_k η_k), вычислим во взятых точках значения $P(\xi_k, \eta_k)$ функции $P(x, y)$. Составим затем произведения этих значений на величины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ проекций дуг*) $M_{k-1}M_k$ на ось Ox и образуем сумму σ всех таких произведений:

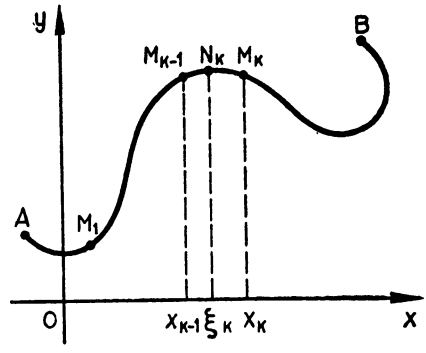


Рис. 63

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

Сумма вида (1) называется *интегральной суммой, составленной для функции $P(x, y)$ на дуге AB* (или, как говорят, *вдоль дуги*) *по координате x.*

Значение интегральной суммы (1) зависит (вообще говоря) от способа разбиения дуги AB на части и от выбора точек N_k (ξ_k, η_k) на каждой из частичных дуг. Будем теперь неограниченно увеличивать число n точек деления дуги AB, однако так, чтобы λ (с. 316) стремилась к нулю. Дадим тогда следующее определение.

Определение. *Криволинейным интегралом от функции $P(x, y)$ вдоль кривой (дуги) AB по координате x называется предел, к которому стремится интегральная сумма σ, когда наибольшая из длин λ дуг $M_{k-1}M_k$ стремится к нулю, при условии, что этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги AB на частичные дуги $M_{k-1}M_k$, ни от выбора точек N_k (ξ_k, η_k) на этих дугах.*

Символически криволинейный интеграл обозначается: $\int_{AB} P(x, y)\, dx$. (Дуга AB при этом часто называется *путем интегрирования.*) Итак, по определению

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл вдоль кривой AB по координате y:

$$\int_{AB} P(x, y)\, dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k,$$

где $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ — проекция дуги $M_{k-1}M_k$ на ось Oy.

*) Величиной проекции направленной дуги $M_{k-1}M_k$ на ось l называют величину проекции вектора $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ на эту ось.

Если криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx \left(\int\limits_{AB} P(x, y)\,dy\right)$ существует, то функция $P(x, y)$ называется *интегрируемой вдоль кривой AB по координате x (y)*.

Из определения криволинейного интеграла (по той или иной координате) следует, что величина его, вообще говоря, зависит как от вида подынтегральной функции, так и от формы дуги AB, вдоль которой рассматривается этот интеграл.

В случае, когда вдоль дуги AB определены две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и существуют интегралы $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$ и $\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$, сумму этих интегралов $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$ называют *полным криволинейным интегралом* (или *криволинейным интегралом общего вида*) вдоль дуги AB и обозначают: $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, так что

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy. \quad (2)$$

Именно с криволинейным интегралом этого вида особенно часто приходится иметь дело в приложениях.

Замечание. Определение криволинейного интеграла не исключает случая совпадения точек A и B, т. е. случая замкнутой кривой, все предыдущие рассуждения остаются при этом в силе, только направление на замкнутой кривой должно быть каким-либо способом указано заранее (см. с. 323). Замкнутую кривую, или, как говорят, замкнутый контур, обычно обозначают здесь какой-либо буквой, например, L. Для обозначения криволинейного интеграла по замкнутому контуру употребляют также символ $\oint\limits_L$.

Возвращаясь к задаче, рассмотренной в § 70, мы можем теперь сказать, что в случае существования соответствующего криволинейного интеграла работа A силового поля при перемещении материальной точки по дуге BC выражается полным криволинейным интегралом от $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ вдоль этой дуги, т. е.

$$A = \int\limits_{BC} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \quad (3)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции вектора $\vec{F}$ (сил поля) соответственно на оси Ox и Oy. Часто эти проекции обозначают через X и Y и формулу (3) записывают в виде:

$$A = \int\limits_{BC} X\,dx + Y\,dy. \quad (4)$$

Таков *механический смысл криволинейного интеграла по координатам.*

§ 72. СУЩЕСТВОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим здесь некоторые простейшие условия, при выполнении которых можно гарантировать существование криволинейного интеграла.

Пусть спрямляемая кривая AB (см. рис. 63) задана параметрическими уравнениями: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$ и функция $\varphi(t)$ имеет производную $\varphi'(t)$, непрерывную на этом сегменте, причем значению параметра $t=\alpha$ соответствует точка A данной кривой, а значению параметра $t=\beta$ — точка B этой кривой, и при изменении параметра t от α до β переменная точка $M(x, y)$ описывает кривую AB в направлении от A к B (см. т. 1, § 110). Пусть, далее, во всех точках данной кривой AB определена и непрерывна некоторая функция $P(x, y)$ (§ 40). Докажем, что при сделанных допущениях существует криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$.

Составим интегральную сумму для функции $P(x, y)$ вдоль дуги AB по координате x:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k.$$

Выразим сумму σ через переменную t. Обозначим через t_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ значения параметра t, которым соответствуют взятые на кривой AB точки деления $M_k(x_k, y_k)$, а через τ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — значения параметра t, которыми определяются выбранные на дугах $M_{k-1}M_k$ точки $N_k(\xi_k, \eta_k)$, так что: $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$, $\xi_k=\varphi(\tau_k)$, $\eta_k=\psi(\tau_k)$ и $\Delta x_k=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда интегральную сумму σ можно записать так:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)][\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})].$$

Функция $\varphi(t)$ на каждом из сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому имеем: $\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=\varphi'(\theta_k)\Delta t_k$, где $t_{k-1}<\theta_k<t_k$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. Следовательно, интегральную сумму σ можно записать еще и так:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\,\varphi'(\theta_k)\,\Delta t_k.$$

Эта сумма хотя и напоминает интегральную сумму для функции $P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)$ одной переменной t, однако она в общем случае еще не является таковой, так как в каждом слагаемом этой суммы функции $P[\varphi(t), \psi(t)]$ и $\varphi'(t)$ вычисляются, вообще говоря, не в одной и той же точке соответствующего сегмента, а в различных

его точках τ_k и θ_k: τ_k выбирается на сегменте $[t_{k-1}, t_k]$ произвольно, а θ_k определяется на интервале (t_{k-1}, t_k) теоремой Лагранжа.

Заметив это, преобразуем сумму σ. Обозначим через γ_k разность $\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\varphi'(\tau_k)\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\gamma_k \Delta t_k. \quad (1)$$

Так как вдоль AB $P(x, y)$ — непрерывная функция переменных x и y, а x и y — непрерывные функции от t на $[\alpha, \beta]$, то сложная функция $P[\varphi(t), \psi(t)]$ также является непрерывной функцией от t, определенной на сегменте $[\alpha, \beta]$ (§ 40). Поэтому первая из сумм, стоящих в правой части равенства (1), есть интегральная сумма, составленная для непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции $P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)$. Следовательно, предел этой суммы, когда максимум λ длин дуг $M_{k-1}M_k$ стремится к нулю, а значит, и $\Delta t_k \to 0$*), существует и есть $\int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\varphi'(\tau_k)\Delta t_k = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\varphi'(\tau_k)\Delta t_k =$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Вторая сумма правой части равенства (1) при $\lambda \to 0$ стремится к нулю. Действительно, функция $P[\varphi(t), \psi(t)]$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, и поэтому ограничена на нем, так что для всех значений t на сегменте $[\alpha, \beta]$ имеем:

$$|P[\varphi(t), \psi(t)]| < K, \quad (2)$$

где K — некоторое постоянное положительное число.

Так как функция $\varphi'(t)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, то она на этом сегменте и равномерно непрерывна, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|\varphi'(\theta) - \varphi'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{K(\beta - \alpha)}$ лишь только $|\theta - \tau| < \delta$.

Произведем теперь разбиение кривой AB на столь мелкие части $M_{k-1}M_k$, чтобы все разности $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ удовлетворяли условию: $|\Delta t_k| < \delta$, тогда и подавно окажется: $|\theta_k - \tau_k| < \delta$ и, следовательно,

$$|\gamma_k| = |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{K(\beta - \alpha)}. \quad (3)$$

*) Длина хорды $M_{k-1}M_k$ не больше длины дуги $M_{k-1}M_k$ и потому стремится к нулю при $\lambda \to 0$. Но в наших условиях (кривая простая) утверждение о стремлении к нулю длины наибольшей из хорд $M_{k-1}M_k$ эквивалентно утверждению о стремлении к нулю Δt_k. На доказательстве последнего факта мы здесь останавливаться не будем.

В силу неравенств (2) и (3) получаем:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P\left[\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k)\right]\gamma_k\Delta t_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|P\left[\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k)\right]\right|\left|\gamma_k\right|\left|\Delta t_k\right| <$$

$$< \frac{K\cdot\varepsilon(\beta-\alpha)}{K(\beta-\alpha)} = \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P\left[\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k)\right]\gamma_k\Delta t_k = \lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} P\left[\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k)\right]\gamma_k\Delta t_k = 0.$$

Отсюда следует (см. (1)), что при $\lambda\to 0$ сумма σ имеет предел, т. е. криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\ \eta_k)\,\Delta t_k$ существует, причем имеет место равенство:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]\varphi'(t)\,dt^{*}). \tag{4}$$

Аналогично доказывается, что если функция $y=\psi(t)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[\alpha, \beta]$ и функция $Q(x, y)$ непрерывна во всех точках простой дуги AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$ существует и имеет место равенство:

$$\int_{AB} Q(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]\psi'(t)\,dt. \tag{5}$$

Наконец, если кривая AB гладкая (§ 35) и, следовательно, обе функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[\alpha, \beta]$ и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны во всех точках дуги AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ также существует и справедлива формула:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\left\{P\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]\varphi'(t) + Q\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]\psi'(t)\right\}dt. \tag{6}$$

Действительно, при сделанном предположении криволинейные интегралы $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$ и $\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$ существуют, а сумма этих интегралов и есть криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)dx+Q(x, y)\,dy$, откуда в силу (4) и (5) мы и получим формулу (6).

*) Можно показать, что найденный предел не зависит от способа параметрализации дуги кривой AB, лишь бы выполнялись условия, наложенные на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Таким образом, мы не только показали существование криволинейного интеграла (при приведенных выше условиях), но одновременно получили и формулу для его вычисления.

§ 73. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Отметим некоторые свойства криволинейного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения. Эти свойства мы рассмотрим, например, для интеграла $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$.

1. *Если функция $P(x, y)$ интегрируема вдоль дуги AB, то и функция $kP(x, y)$, где k — любое постоянное, также интегрируема вдоль дуги AB, причем*

$$\int\limits_{AB} kP(x, y)\,dx = k\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx.$$

2. *Если функции $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ интегрируемы вдоль дуги AB, то функция $P_1(x, y) \pm P_2(x, y)$ также интегрируема вдоль этой дуги, причем*

$$\int\limits_{AB} [P_1(x, y) \pm P_2(x, y)]\,dx = \int\limits_{AB} P_1(x, y)\,dx \pm \int\limits_{AB} P_2(x, y)\,dx.$$

3. (свойство аддитивности). *Если некоторой точкой C дуга AB разбита на две дуги AC и CB и функция $P(x, y)$ интегрируема вдоль каждой из дуг AC и CB, то она интегрируема и вдоль самой дуги AB, причем*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{AC} P(x, y)\,dx + \int\limits_{CB} P(x, y)\,dx.$$

Эти свойства криволинейного интеграла легко доказываются непосредственно, исходя из соответствующих интегральных сумм.

4. *Если существует криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$, то существует и криволинейный интеграл $\int\limits_{BA} P(x, y)\,dx$, причем*

$$\int\limits_{BA} P(x, y)\,dx = -\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx,$$

т. е. при изменении направления интегрирования на противоположное, криволинейный интеграл изменяет знак на противоположный, сохраняя абсолютное значение.

В самом деле, если точку B посчитать началом, а точку A — концом дуги AB, то точка M_k деления этой дуги будет предшествовать точке M_{k-1} ($k = 1, 2, \ldots, n$) и, значит, числа $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, входящие в интегральную сумму σ, заменятся числами $x_{k-1} - x_k$, а, следовательно, сама сумма σ заменится суммой $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_{k-1} - x_k)$.

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_{k-1} - x_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1})$$

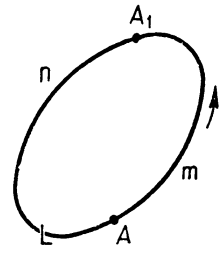


Рис. 64

и криволинейный интеграл вдоль дуги AB по условию существует, то существует и предел суммы, стоящей в левой части последнего равенства, причем

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_{k-1} - x_k) = -\int_{AB} P(x, y)\,dx,$$

т. е.

$$\int_{BA} P(x, y)\,dx = -\int_{AB} P(x, y)\,dx.$$

Заметим, что в условиях применимости формулы (4) § 72 это свойство является простым ее следствием: изменение направления пути интегрирования на противоположное вызывает только перестановку пределов в определенном интеграле, выражающем криволинейный интеграл, а от этого меняется только знак интеграла.

5. *Если функция $P(x, y)$ интегрируема по замкнутому контуру L, то величина криволинейного интеграла $\int_L P(x, y)\,dx$ не зависит от того, какую точку контура L выбрать за начало (и тем самым за конец) пути интегрирования.*

Действительно, пусть A и A_1 — любые две несовпадающие точки замкнутого контура (рис. 64). Тогда, рассматривая точку A как начало, а значит, и как конец обхода контура, мы можем криволинейный интеграл по контуру L в направлении, указанном стрелкой на рисунке 64, представить в виде суммы криволинейных интегралов по дугам AmA_1 и A_1nA (см. свойство 3):

$$\int_{AmA_1nA} = \int_{AmA_1} + \int_{A_1nA}^{*)}. \qquad (1)$$

Если же рассматривать точку A_1 как начало обхода (а следовательно, и конец обхода), то криволинейный интеграл по контуру L в том же направлении можно записать в виде следующей суммы криволинейных интегралов: $\int_{A_1nAmA_1} = \int_{A_1nA} + \int_{AmA_1}$, или

$$\int_{A_1nAmA_1} = \int_{AmA_1} + \int_{A_1nA}. \qquad (2)$$

*) Подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx$ мы для краткости записи здесь опускаем.

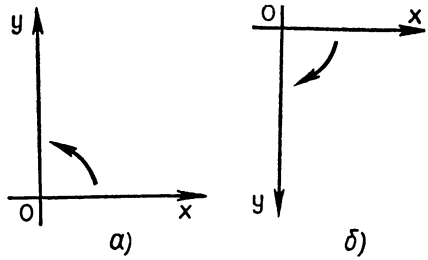


Рис. 65

Из (1) и (2) находим:

$$\int\limits_{AmA_1nA} = \int\limits_{A_1nAmA_1},$$

что и требовалось доказать.

При вычислении криволинейного интеграла вдоль той или иной дуги направление интегрирования указывалось порядком написания букв, обозначающих начало и конец этой дуги. Однако, если контур замкнут и не имеет точек самопересечения, указание начальной и (совпадающей с ней) конечной точки, очевидно, не определяет направления, в котором описывается кривая L. В этом случае обычно выбор положительного направления на замкнутом контуре L осуществляется в зависимости от того, с какой стороны находится от наблюдателя, обходящего этот контур в указанном направлении, ближайшая к нему часть области, ограниченная этим контуром. При этом возникает двоякая возможность выбора такого положительного направления. Оно может быть таким, что при указанном обходе замкнутого контура область, ограниченная контуром L, остается все время слева и таким, когда она остается все время справа от наблюдателя. Какое именно из указанных двух направлений выбирается на замкнутом контуре, обычно связывают с принятой ориентацией координатных осей. Различают правую и левую ориентацию этих осей. Если (как на рис. 65, *а*) для совпадения положительного направления оси Ox с положительным направлением оси Oy нужно повернуть $\left(\text{на угол } \frac{\pi}{2}\right)$ ось Ox против часовой стрелки, то говорят, что имеется левая ориентация осей; если же для совпадения положительного направления оси Ox с положительным направлением оси Oy нужно повернуть $\left(\text{на угол } \frac{\pi}{2}\right)$ ось Ox по часовой стрелке (как на рис. 65, *б*), то говорят, что дана правая ориентация осей.

Мы будем считать, что имеем левую ориентацию осей и потому условимся здесь раз и навсегда называть положительным или прямым направлением обхода замкнутого контура L то, при котором часть области, ограниченная контуром L, остается слева от наблюдателя*) (рис. 66, *а*). Противоположное этому направлению будем называть отрицательным (рис. 66, *б*).

---

*) Иногда положительное направление обхода на замкнутом контуре связывают с направлением движения по часовой стрелке или против часовой стрелки. Однако такое сопоставление направления с движением часовой стрелки удается провести не для каждого контура. Так, например, на рисунке 67 направление, указанное стрелками, нельзя считать ни направлением обхода по часовой стрелке, ни направлением обхода против часовой стрелки.

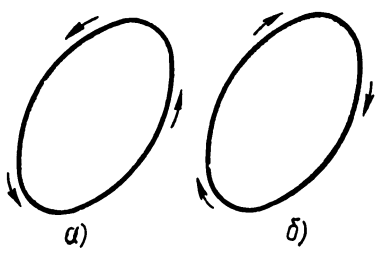


Рис. 66

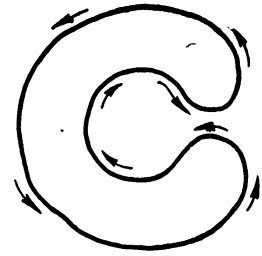


Рис. 67

Условимся также в следующем: если путь интегрирования L есть простая замкнутая кривая, то символ $\int_L P(x, y)\,dx$ при отсутствии дополнительных указаний обозначает интеграл, взятый в положительном направлении; интеграл же, взятый в отрицательном направлении, будет обозначаться символом $-\int_L P(x, y)\,dx$. Часто криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру в положительном направлении, обозначают символом $\oint_L$, а криволинейный интеграл, взятый по тому же контуру в отрицательном направлении, обозначают символом $\oint_L$ (на кружке, поставленном на знаке интеграла, указывается стрелкой направление обхода контура). Очевидно, что в силу свойства (4) интегралы $\oint_L$ и $\oint_L$ равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е. $\oint_L = -\oint_L$.

Замечание 1. Если путь интегрирования имеет самопересечения (рис. 68), то в этом случае рассмотренные способы задания направления интегрирования непригодны. Здесь приходится указывать путь интегрирования стрелками, расставленными на линии интегрирования.

Замечание 2. Если достаточные условия существования криволинейного интеграла $\int_L P\,dx + Q\,dy$*), приведенные на с.319, не выполняются на дуге L, но последнюю можно разбить на такие, части $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (рис. 69), на которых эти условия выполняются,

*) Для сокращения записи мы пишем здесь P и Q вместо $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

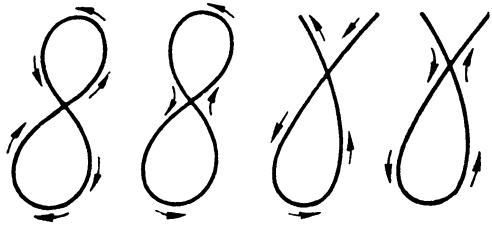


Рис. 68

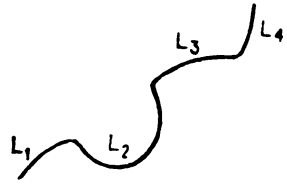


Рис. 69

то за величину интеграла $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ принимают сумму криволинейных интегралов по указанным отдельным частям:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{L_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{L_2} P\,dx + Q\,dy + \ldots + \int\limits_{L_n} P\,dx + Q\,dy.$$

Такое определение позволяет нам рассматривать криволинейные интегралы от $P\,dx + Q\,dy$ не только по гладким кривым, но и по кусочно-гладким.

§ 74. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Криволинейные интегралы вычисляются чаще всего путем сведения их к обыкновенным определенным интегралам.

Пусть сначала AB — гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \tag{1}$$

причем начальная точка A дуги AB соответствует значению параметра $t = \alpha$, а конечная точка B этой дуги — значению параметра $t = \beta$ и при монотонном изменении параметра t от α до β точка (x, y) описывает дугу AB в направлении от A к B. Тогда, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны во всех точках кривой AB, криволинейные интегралы $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$, $\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$ и $\int\limits_{AB} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)]\,dy$ существуют и выражаются формулами (§ 72):

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt, \tag{2}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\,dt, \tag{3}$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}\,dt. \tag{4}$$

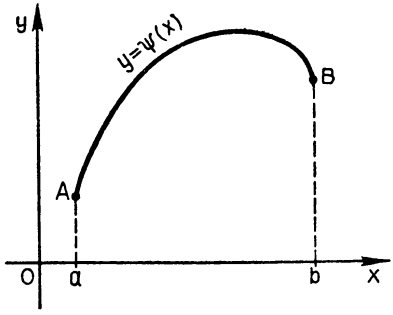


Рис. 70

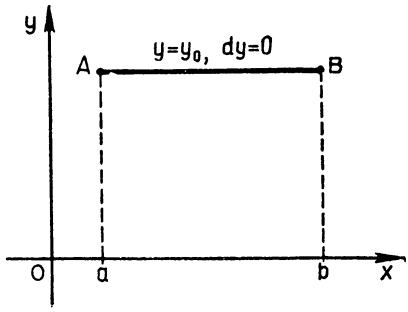


Рис. 71

Таким образом, равенства (2), (3) и (4) могут служить формулами для вычисления криволинейных интегралов*). Например, формула (2) показывает, что для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$ достаточно в подынтегральном выражении $P(x, y)\,dx$ заменить переменные x и y их выражениями из (1) через параметр t, а dx — дифференциалом функции $x = \varphi(t)$ (т. е. принять $dx = \varphi'(t)\,dt$), рассматривая его как сомножитель в подынтегральном выражении, и затем вычислить от полученного выражения определенный интеграл в пределах изменения параметра от значения α до β.

Замечание 1. Формула (4) остается справедливой также и в том случае, если дуга AB превращается в замкнутый контур лишь бы этот контур соответствовал монотонному изменению параметра t от α до β, такому, при котором каждая точка замкнутого контура получается только при одном значении параметра t (исключая крайние значения для t).

Пусть теперь кривая AB задана явным уравнением $y = \psi(x)$ (рис. 70), причем перемещению по этой кривой из точки A в точку B соответствует изменение x от a до b. Предположим, что функция $\psi(x)$ непрерывна во всех точках кривой AB. Данную кривую легко параметризировать. Принимая за параметр t переменную x, т. е. полагая $t = x$, получим следующие параметрические уравнения кривой AB:

$$x = x,\ y = \psi(x)\ (a \leqslant x \leqslant b).$$

Замечая теперь, что в рассматриваемом случае $dx = x'dx = 1 \cdot dx$, мы согласно (2) приходим к формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P[x, \psi(x)]\,dx. \tag{5}$$

*) При выводе формул (2), (3) и (4) предполагалось, что заданному направлению на кривой AB соответствует изменение параметра t от α до β (где $\alpha < \beta$). Очевидно, эти формулы справедливы также и в случае $\alpha > \beta$.

Предполагая же, что функция $\psi(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную, а функция $Q(x, y)$ непрерывна в точках дуги AB, мы согласно (3) и (4) получаем формулы:

$$\int_{AB} Q(x, y)\, dy = \int_a^b Q[x, \psi(x)]\psi'(x)\, dx,$$

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)]\psi'(x)\}dx. \qquad (6)$$

В частности, если кривая AB является отрезком прямой $y = y_0$, параллельной оси Ox (отрезком этой оси) (рис. 71), то $dy = \psi'(x)\, dx = 0$ и $\int_{AB} Q(x, y)\, dy = 0$, а потому

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int_a^b P(x, y_0)\, dx =$$

$$= \int_a^b P_1(x)\, dx \qquad (P_1(x) = P(x, y_0)).$$

Таким образом, обыкновенный определенный интеграл является частным случаем криволинейного интеграла, у которого линией интегрирования служит отрезок оси Ox ($y_0 = 0$).

Аналогично, если интегрирование распространяется на кривую AB, заданную явным уравнением вида $x = \varphi(y)$ (рис. 72), причем перемещение из точки A в точку B по дуге AB происходит при изменении y от c до d и функция $\varphi(y)$ вместе со своей производной $\varphi'(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны во всех точках дуги AB, то мы имеем:

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int_c^d \{P[\varphi(y), y]\varphi'(y) + Q[\varphi(y), y]\}\, dy. \qquad (7)$$

В частности, если AB — отрезок прямой $x = x_0$, параллельной оси Oy (рис. 73), то $dx = 0$ и $\int_{AB} P(x, y)\, dx = 0$, а

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int_c^d Q(x_0, y)\, dy. \qquad (8)$$

Замечание 2. В случае однократного пересечения дуги AB прямой, параллельной оси Oy, криволинейный интеграл $\int_{AB} P\, dx + Q dy$

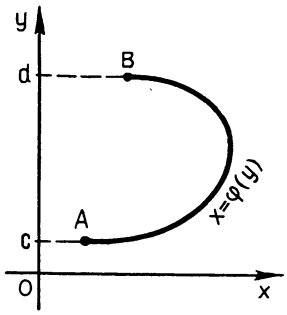


Рис. 72

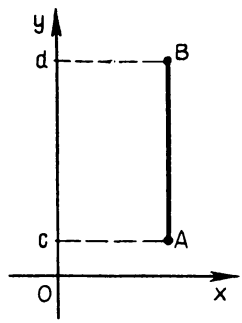


Рис. 73

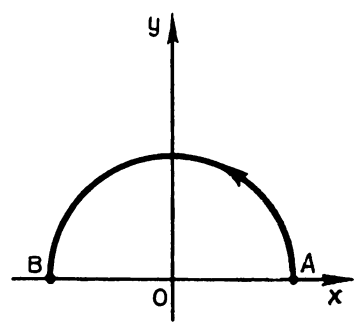


Рис. 74

вычисляется по формуле (6), а в случае однократного пересечения дуги AB прямой, параллельной оси Ox, — по формуле (7). Если же условия однократности пересечения дуги AB прямыми, параллельными осям координат, нарушается (сюда относится и случай замкнутого контура), но дугу AB можно разбить на конечное число частичных дуг, каждую из которых любая параллель каждой из координатных осей пересекает не более чем в одной точке, то криволинейный интеграл по дуге AB можно вычислить (пользуясь свойством 3) как сумму криволинейных интегралов, взятых по частичным дугам (для каждого из которых уже применимы формулы (6) и (7)).

Пример 1. Вычислить значение криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} (2xy - y^2)\,dx$, где AB означает верхнюю половину окружности с центром в начале координат и радиусом R (рис. 74).

Р е ш е н и е. Уравнение окружности возьмем в параметрической форме:

$$x = R\cos t,\quad y = R\sin t. \tag{9}$$

Из этих уравнений находим, что точка $A\,(R, 0)$ соответствует значению параметра $t = 0$, а точка $B\,(-R, 0)$ — значению параметра $t = \pi$. Точка (x, y) описывает дугу AB в направлении от A к B при изменении параметра t от 0 до π. Функция $P\,(x, y) = 2xy - y^2$ непрерывна во всех точках гладкой кривой (9). Следовательно, данный криволинейный интеграл существует и может быть вычислен по формуле (2). Подставляя вместо x и y их выражения через t и заменяя dx через $-R\sin t\,dt$, находим:

$$\int\limits_{AB} (2xy - y^2)\,dx = -\int\limits_0^{\pi} (2R^2\sin t\cos t - R^2\sin^2 t)\,R\sin t\,dt =$$

$$= -2R^3\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\,dt + R^3\int\limits_0^{\pi}\sin^3 t\,dt = \left[-2R^3\frac{\sin^3 t}{3} + R^3\left(-\cos t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}R^3.$$

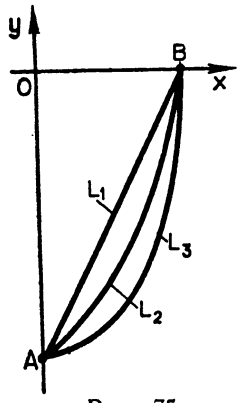


Рис. 75

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L (2 + xy^2)\,dx - (3 - x^2y)\,dy$$

по кривой L, соединяющей точки A (0, —2) и $B(1, 0)$, если кривая L есть: а) прямая $y = 2x - 2$ (L_1); б) парабола $y^2 = 4 - 4x$ (L_2); в) эллипс $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ (L_3) (рис. 75).

Решение. а) Так как путь интегрирования задан явным уравнением $y = 2x - 2$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, то вычисляем данный интеграл по формуле (6). Замечая, что здесь $dy = 2dx$, получаем:

$$I_1 = \int_{L_1} (2 + xy^2)\,dx - (3 - x^2y)\,dy = \int_0^1 \{2 + x\,(2x - 2)^2 - [3 - x^2\,(2x - 2)]\}\,2dx = -4.$$

б) Запишем уравнение пути интегрирования в виде: $x = 1 - \frac{y^2}{4}$, где $-2 \leqslant y \leqslant 0$. Замечая, что $dx = -\frac{y\,dy}{2}$, получаем (по формуле (7)):

$$I_2 = \int_{L_2} (2 + xy^2)\,dx - (3 - x^2y)\,dy = \int_{-2}^0 \left\{\left[2 + \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)y^2\right]\left(-\frac{y}{2}\right) - \left[3 - \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 y\right]\right\} dy = \int_{-2}^0 \left(\frac{3}{16}y^5 - y^3 - 3\right) dy = -4.$$

в) Запишем уравнения эллипса в параметрической форме: $x = \cos t$, $y = 2\sin t$. Из этих уравнений видно, что точка A (0, —2) кривой соответствует, например, значению параметра $t = -\frac{\pi}{2}$, а точка B (1, 0) этой кривой — значению параметра $t = 0$. При изменении t от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 точка (x, y) пробегает дугу L в направлении от A к B. Учитывая еще, что $dx = -\sin t\,dt$ и $dy = 2\cos t\,dt$, находим (по формуле (4)):

$$I_3 = \int_{L_3} (2 + xy^2)\,dx - (3 - x^2y)\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4\cos^3 t \sin t - 4\sin^3 t \cos t - 2\sin t - 6\cos t)\,dt = \left[-\cos^4 t - \sin^4 t + 2\cos t - 6\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -4.$$

Заметим, что значение рассмотренного криволинейного интеграла по всем трем различным кривым, соединяющим одни и те же точки, здесь одинаково. Это обстоятельство является характерным для ряда случаев. Ниже (§ 77) мы займемся этим вопросом специально.

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L x\,(y - 2)\,dx + y\,(2 - x)\,dy,$$

где L ломаная, ограничивающая треугольник с вершинами A (—2, 0), O (0, 0) и B (0, 1) (рис. 76).

Р е ш е н и е. Здесь линия L интегрирования есть замкнутая ломаная $AOBA$, состоящая из прямолинейных отрезков AO, OB и BA, которые лежат на различных прямых (с различными уравнениями). В соответствии с этим данный криволинейный интеграл вычисляем как сумму криволинейных интегралов, взятых отдельно по прямолинейным отрезкам AO, OB и BA:

$$I = \int\limits_L = \int\limits_{AO} + \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA}.$$

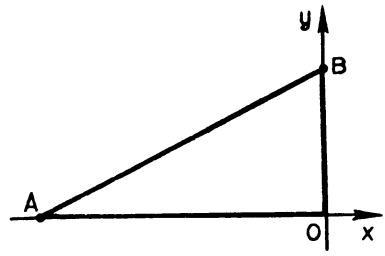


Рис. 76

Вдоль отрезка AO имеем: $y=0$ и $dy = 0$, так что $\int\limits_{AO} = -2\int\limits_{-2}^{0} x\,dx = -x^2\Big|_{-2}^{0} =$ $= 4$. Вдоль отрезка OB будет: $x = 0$ и $dx = 0$, поэтому $\int\limits_{OB} = 2\int\limits_{0}^{1} y\,dy = 1$.

Наконец, вычислим данный криволинейный интеграл вдоль отрезка BA. Для этого составим уравнение прямой, проходящей через точки B (0, 1) и A (—2, 0). Уравнение этой прямой будет: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1}$ или $y = \frac{x}{2} + 1$. Таким образом, мы имеем явное уравнение линии интегрирования BA. Находим $dy = \frac{1}{2}dx$, и по формуле (6) получаем:

$$\int\limits_{BA} = \int\limits_{0}^{-2} \left[x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)(2-x)\,\frac{1}{2}\right]dx = -\frac{14}{3}.$$

Итак, окончательно

$$I = \int\limits_{AO} + \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA} = 4 + 1 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Определить работу A, производимую силой тяжести при перемещении на плоскости материальной точки M с массой m из положения M_1 (a_1, b_1) в положение M_2 (a_2, b_2) по любой гладкой кривой L (рис. 77).

Р е ш е н и е. Пусть $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ — параметрические уравнения гладкой кривой L, соединяющей точки M_1 и M_2; причем точка M_1 получается при $t = \alpha$, а точка M_2 получается при $t = \beta$.

Очевидно, проекции силы $\vec{F}$ тяжести, для которой $|\vec{F}| = mg$, на оси координат имеют значения:

$$X = 0, \quad Y = -mg\cos 0 = -mg. \tag{10}$$

Компонента Y имеет отрицательное значение, так как ее направление противоположно направлению оси Oy. Учитывая (10), имеем по формуле (3) из § 71:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{M_1M_2} (-mg)\,dy = -mg\int\limits_{M_1M_2} dy,$$

и согласно (3) окончательно получаем:

$$A = -mg\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\psi(t) = -mg\,[\psi(\beta) - \psi(\alpha)] = mg\,(b_1 - b_2).$$

Таким образом, работа силы тяжести зависит только от разности ординат конечной и начальной точек пути и не зависит от формы пути, по которому перемещалась материальная точка M.

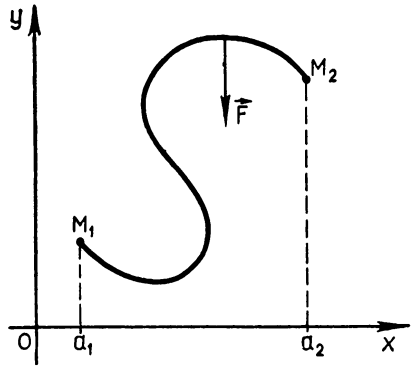


Рис. 77

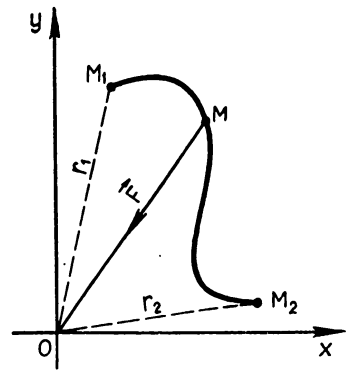


Рис. 78

Пример 5. Найти работу силы $\vec{F}$ ньютонова притяжения к неподвижному центру массы m при перемещении (в плоскости) материальной точки M единичной массы из положения M_1 в положение M_2.

Р е ш е н и е. Поместим начало координат O в заданный неподвижный центр (рис. 78). Пусть $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ — параметрические уравнения линии, соединяющей точки M_1 и M_2, причем точка M_1 получается при $t = \alpha$, а точка M_2 — при $t = \beta$. Будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные.

Очевидно, сила $\vec{F}$ направлена к точке O и имеет величину $\frac{km}{r^2}$, где k — постоянная тяготения, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние точки M от начала координат, так что $|\vec{F}| = \frac{km}{r^2}$. Далее, для угла γ между направлением силы $\vec{F}$ и оси Ox имеем: $\cos\gamma = -\frac{x}{r}$, $\sin\gamma = -\frac{y}{r}$ *). Поэтому проекции силы $\vec{F}$ на оси координат будут:

$$X = \frac{km}{r^2}\cos\gamma = -\frac{km}{r^2}\,\frac{x}{r}, \quad Y = \frac{km}{r^2}\sin\gamma = -\frac{km}{r^2}\,\frac{y}{r}.$$

Значит, работа A силы ньютонова притяжения может быть выражена криволинейным интегралом

$$A = -km\int_{M_1M_2}\frac{x\,dx + y\,dy}{r^3}.$$

Согласно тождеству $x^2 + y^2 = r^2$ имеем: $x\,dx + y\,dy = r\,dr$. Следовательно,

$$A = -km\int_{M_1M_2}\frac{r\,dr}{r^3} = -km\int_{M_1M_2}\frac{dr}{r^2} = km\int_{M_1M_2} d\left(\frac{1}{r}\right),$$

а так как $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}$ и $\gamma \leqslant t \leqslant \beta$, то по (2) имеем:

$$A = km\int_{\alpha}^{\beta} d\frac{1}{r(t)} = \frac{km}{r(t)}\Big|_{\alpha}^{\beta} = km\left[\frac{1}{r(\beta)} - \frac{1}{r(\alpha)}\right] = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

*) Направление силы $\vec{F}(x, y)$ образует (для случая, когда точки (x, y) берутся в первой четверти) с положительным направлением оси Ox угол γ, лежащий в третьей четверти, и потому $\cos\gamma < 0$ и $\sin\gamma < 0$.

где через r_1 и r_2 обозначены соответственно расстояния точек M_1 и M_2 от начала координат.

Здесь также величина работы зависит лишь от расстояния начальной и конечной точек траектории от начала координат, т. е. от положения точек M_1 и M_2, и не зависит от формы траектории.

Пример 6. Плоское силовое поле создано положительными электрическими зарядами (в различных точках плоскости помещается положительная единица заряда) так, что между двумя положительными зарядами действует сила величиной $|\vec{F}| = \frac{k}{r^2}$. Найти работу этой силы при перемещении материальной точки M единичной массы из положения M_1 в положение M_2.

Р е ш е н и е. Здесь вместо притягивающего центра (пример 5) мы имеем отталкивающий центр. Следовательно, работа силы $\vec{F}$ в этом случае может быть получена по формуле для работы A, найденной в указанном примере, если положить в ней $m = 1$ и изменить знак у A на противоположный. Будем иметь: $A = k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

В частности, если $r_2 \to \infty$, то $A \to \frac{k}{r_1}$. Эта работа, как известно, называется потенциалом. Таким образом, потенциал в каждой точке поля электрического заряда обратно пропорционален расстоянию этой точки до заряда.

Уже рассмотренные задачи показывают, что криволинейные интегралы имеют разнообразные применения в теории поля.

З а м е ч а н и е. Понятие криволинейного интеграла от функции $P(x, y)$ вдоль плоской кривой AB легко обобщается на функции любого числа аргументов, заданных на спрямляемых линиях, в пространстве соответствующего числа измерений. Так, например, если на некоторой спрямляемой кривой AB, лежащей в трехмерном пространстве, определена функция $P(x, y, z)$, то, разбив кривую AB (от точки A до точки B) произвольно на части $M_{k-1}M_k$, выбрав на них точки (ξ_k, η_k, ζ_k) и составив сумму вида $\sigma = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k$, рассматривают вопрос о существовании предела этой суммы при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг $M_{k-1}M_k$; если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения кривой AB на частичные дуги $M_{k-1}M_k$, ни от выбора точек $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ на этих дугах, то его называют криволинейным интегралом от функции $P(x, y, z)$ вдоль кривой AB по координате x и обозначают:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx.$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы от $P(x, y, z)$ по координатам y и z, они соответственно обозначаются:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dy, \quad \int_{AB} P(x, y, z)\,dz.$$

Точно так же (см. с. 318) определяется криволинейный интеграл общего вида:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} P\,dx + \int_{AB} Q\,dy + \int_{AB} R\,dz.$$

Условия существования таких интегралов, основные их свойства, а также правила вычисления интегралов аналогичны тем, которые были сформулированы выше для криволинейных интегралов от функций двух переменных.

§ 75. ФОРМУЛА ГРИНА

Между криволинейным интегралом, взятым по замкнутой кривой L, ограничивающей некоторую область D, и двойным интегралом по самой этой области существует определенная связь. Выводом формулы, устанавливающей эту связь, мы и займемся.

Рассмотрим в плоскости xOy замкнутую область D первого типа (см. с. 282), ограниченную замкнутым контуром L, образованным двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ и двумя непрерывными на сегменте $[a, b]$ кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ на всем сегменте $[a, b]$ (рис. 79)*). Здесь любая прямая, проходящая через внутреннюю для D точку параллельно оси Oy, пересекает границу области ровно в двух точках. Пусть функция $P(x, y)$ определена и непрерывна со своей частной производной $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой области D. Тогда существует двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$. Поставим своей задачей представить его в виде криволинейного интеграла.

Замечая, что здесь абсцисса x точек граничной кривой изменяется между a и b, а пределы изменения y есть функции от x, т. е. $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, мы можем записать (§ 66, формула 12):

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy,$$

где внутренний интеграл, как обычно, вычисляется в предположении, что x сохраняет постоянное значение. При этом условии функция $P(x, y)$ является первообразной для $\frac{\partial P}{\partial y}$. Поэтому по формуле Ньютона—Лейбница находим:

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = P(x, y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)],$$

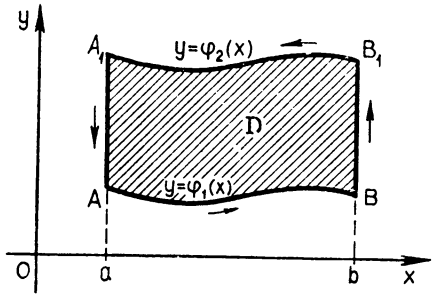


Рис. 79

и, следовательно,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b P[x, \varphi_2(x)]\, dx - \int\limits_a^b P[x, \varphi_1(x)]\, dx,$$

*) Каждый из отрезков AD и BC может вырождаться в точку.

или

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{b}^{a} P[x,\ \varphi_2(x)]\,dx - \int\limits_{a}^{b} P[x,\ \varphi_1(x)]\,dx.$$

Каждый из интегралов правой части последнего равенства может быть заменен согласно формуле (5) § 74 криволинейным интегралом от функции $P(x, y)$: первый криволинейным интегралом вдоль дуги B_1A_1, второй — криволинейным интегралом вдоль дуги AB. Мы можем поэтому записать:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{B_1A_1} P(x,\ y)\,dx - \int\limits_{AB} P(x,\ y)\,dx. \qquad (1)$$

Заметим теперь, что криволинейные интегралы от функции $P(x, y)$ по координате x вдоль отрезков BB_1 и A_1A, перпендикулярных оси Ox, т. е. интегралы $\int\limits_{BC} P\,dx$ и $\int\limits_{DA} P\,dx$, равны нулю (см. с. 328). В силу этого мы можем переписать равенство (1) в виде:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{AB} P\,dx - \int\limits_{BB_1} P\,dx - \int\limits_{B_1A_1} P\,dx - \int\limits_{A_1A} P\,dx =$$

$$= -\left[\int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{BB_1} P\,dx + \int\limits_{B_1A_1} P\,dx + \int\limits_{A_1A} P\,dx\right].$$

Интегралы, стоящие в квадратной скобке, имеют одну и ту же подынтегральную функцию $P(x, y)$ и вычисляются по кривым AB, BB_1, B_1A_1 и A_1A, на которые разбит замкнутый контур L. Сумму всех этих интегралов мы можем заменить одним криволинейным интегралом от функции $P(x, y)$, взятым по всему замкнутому контуру L (ABB_1A_1A), проходимому в положительном направлении (свойство 3, § 73). Таким образом, окончательно получаем:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{L} P(x,\ y)\,dx. \qquad (2)$$

Полученная формула выражает двойной интеграл по области D через криволинейный интеграл по контуру L, ограничивающему эту область. Эта формула установлена для простейшей области первого типа. Но легко убедиться, что она остается в силе и для области более сложного вида, именно для любой области D, которую можно разбить с помощью нескольких прямых (параллельных оси Oy) на конечное число областей первого типа.

В самом деле, пусть область D, ограниченная гладкой или кусочно-гладкой кривой L, разбита на n частичных областей D_1, D_2, D_3, ..., D_n указанного выше вида. (Например, на рис. 80 изображено разбиение области D на 5 частичных областей требуемого вида с помощью прямых MN и

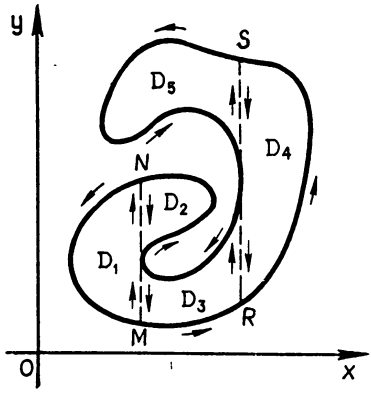


Рис. 80

RS, параллельных оси Oy.) Обозначим контуры областей D_k соответственно через L_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Тогда по доказанному имеем равенства:

$$\iint\limits_{(D_k)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{L_k} P(x, y)\, dx$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Сложив все эти равенства почленно, получим:

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \iint\limits_{(D_2)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \ldots + \iint\limits_{(D_n)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy =$$

$$= -\int\limits_{L_1} P\, dx - \int\limits_{L_2} P\, dx - \ldots - \int\limits_{L_n} P\, dx. \tag{3}$$

Сумма двойных интегралов по частичным областям $D_1, D_2, \ldots, D_n$, стоящих в левой части последнего равенства, дает двойной интеграл, взятый по всей области D. Криволинейные интегралы, стоящие в правой части этого равенства, вычисляются в положительном направлении по контурам $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Каждый из этих контуров состоит из линий, ограничивающих данную область D, и из вспомогательных прямых вида $x = \text{const}$, с помощью которых область D разбита на частичные области D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Так как криволинейный интеграл по координате x, взятый по любому отрезку прямой вида $x = \text{const}$, равен нулю (с. 328), то криволинейные интегралы по вспомогательным прямым могут при этом не учитываться. Остающиеся же части криволинейных интегралов $\int P dx$, очевидно, дают в сумме один криволинейный интеграл, взятый вдоль замкнутого контура L в положительном направлении (§ 73, свойство 3). Следовательно, равенство (3) может быть переписано в виде:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{L} P\, dx,$$

т. е. формула (2) справедлива и для рассмотренной области D.

В частности, формула (2) будет верна и в случае так называемой «многосвязной» области (обладающей «дырами»), т. е. области, которая ограничена не одной, а несколькими замкнутыми линиями (контурами), не имеющими общих точек, и если такая область может быть разбита прямыми, параллельными оси Oy, на конечное число областей рассмотренного выше вида. Так, на рисунке 81 двусвязная*) область D, граница L которой состоит из двух гладких замкнутых контуров L_1 (внешнего) и L_2 (внутреннего), разбита прямыми mn и rs, параллельными оси Oy, на 4 односвязные области D_1, D_2, D_3 и D_4, для каждой из которых формула (2) применима.

---

* Если число замкнутых контуров (без общих внутренних точек и без самопересечений), ограничивающих область, равно n, то эту область называют n-связной. В частности, можно говорить об односвязной области ($n = 1$), т. е. об области без «дыр».

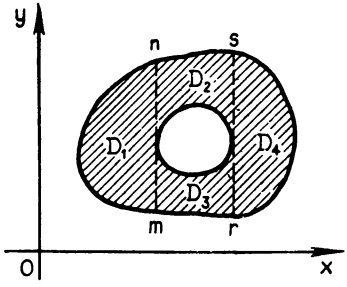


Рис. 81

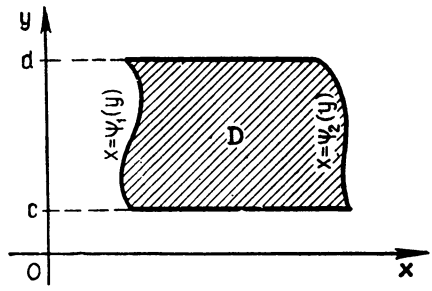


Рис. 82

Рассмотрим теперь в плоскости xOy простейшую область D второго типа (с. 284), ограниченную замкнутым контуром L, образованным двумя прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$ (они в частных случаях могут стягиваться в точки) и двумя непрерывными на сегменте $[c, d]$ кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, где $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ на всем сегменте $[c, d]$ (рис. 82). Пусть функция $Q(x, y)$ двух независимых переменных x и y определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области D. Тогда существует двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} \dfrac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$. Представим этот интеграл в виде двукратного, в котором внутреннее интегрирование выполняется по x:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx.$$

Учитывая, что $Q(x, y)$ является (по x) первообразной для $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, находим:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_c^d \{Q[\psi_2(y), y] - Q[\psi_1(y), y]\}\, dy = \int\limits_c^d Q[\psi_2(y), y]\, dy -$$

$$- \int\limits_c^d Q[\psi_1(y), y]\, dy = \int\limits_c^d Q[\psi_2(y), y]\, dy + \int\limits_d^c Q[\psi_1(y), y]\, dy.$$

Рассуждая, далее, так же, как и при выводе формулы (2), получим:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{AB} Q\, dy + \int\limits_{BC} Q\, dy + \int\limits_{CD} Q\, dy + \int\limits_{DA} Q\, dy.$$

Сумму криволинейных интегралов, стоящих в правой части последнего равенства, можно заменить одним интегралом от функции

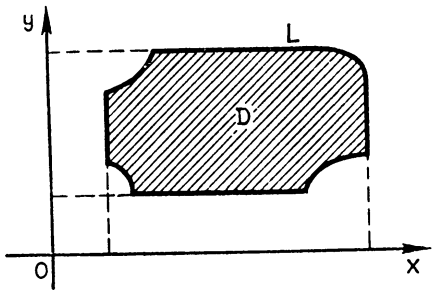


Рис. 83

$Q(x, y)$, взятым по всему контуру L, проходимому в положительном направлении. Итак, имеем равенство:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{L} Q(x, y)\, dy, \quad (4)$$

аналогичное равенству (2), но отличающееся от него знаком в правой части. Это отличие обусловлено тем, что при выборе определенного направления обхода по замкнутым кривым взаимное расположение координатных осей теряет свою симметрию. В равенстве (2) криволинейный интеграл по контуру L берется в том направлении, в котором надо вращать ось Ox на прямой угол для совпадения ее направления с направлением оси Oy; в равенстве (4) (с переменной y) криволинейный интеграл по контуру L вычисляется в том же направлении, но это направление уже противоположно тому, при котором вращение оси Oy на прямой угол дает совпадение ее направления с направлением оси Ox.

Рассуждения, ничем не отличающиеся от изложенных выше, показывают, что формула (4) остается справедливой и для любой области D, которую можно разбить прямыми, параллельными оси Ox, на конечное число простейших областей второго типа.

Пусть теперь область D одновременно удовлетворяет условиям, при которых установлены формулы (2) и (4) (рис. 83). Тогда, если функции $P(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $Q(x, y)$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой области D, то имеют место оба равенства (2) и (4). Вычитая равенство (2) из равенства (4) почленно, мы получим формулу

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{L} P\, dx + Q\, dy. \quad (5)$$

Эта важная формула, устанавливающая связь между двойным интегралом по области D и полным криволинейным интегралом по ее контуру L, *называется формулой Грина**) (по имени английского математика и физика Д. Грина (1793—1841)). Формула Грина широко применяется как в самом математическом анализе, так и его приложениях. Одно из важнейших ее приложений будет рассмотрено в § 76.

Замечание 1. К областям, для которых выведена формула Грина, как легко доказать, относятся все многоугольные фигуры (с простым замкнутым контуром). С помощью приближения криволинейных областей многоугольными областями доказывается, что

*) Эта формула является частным случаем более общей формулы, установленной русским математиком М. В. Остроградским (1801—1861).

формула Грина остается справедливой и для любой области, ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами.

Замечание 2. Условия, при которых имеет место формула Грина, не являются необходимыми. Например, читатель может легко убедиться, что функции $P=\frac{x}{x^2+y^2}$ и $Q=\frac{y}{x^2+y^2}$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ разрывны в точке (0, 0) круга D: $x^2+y^2\leqslant 1$, а тем не менее $\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$, где L — соответствующая окружность.

§76. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Криволинейные интегралы часто удобно использовать при вычислении площадей плоских фигур. Если положить в формуле (2) (§ 75) $P(x, y)\equiv y$, то, учитывая, что $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, получаем:

$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy=-\int\limits_L y\,dx.$$

Так как интеграл $\iint\limits_{(D)} dx\,dy$ численно равен площади S плоской области D (§ 63), то имеем:

$$S=-\int\limits_L y\,dx. \tag{1}$$

Подобным образом, если положить в формуле (4) (§ 75) $Q(x, y)\equiv x$, придем к формуле:

$$S=\int\limits_L x\,dy. \tag{2}$$

Складывая почленно равенства (1) и (2) и деля обе части полученного равенства на 2, приходим к формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_L x\,dy-y\,dx. \tag{3}$$

Формулы (1), (2) и (3) выражают площадь плоской фигуры через криволинейный интеграл, взятый по ее контуру.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t.$$

Решение. При обходе эллипса в положительном направлении параметр t монотонно изменяется от 0 до 2π. Замечая, далее, что здесь $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$, и пользуясь формулой (3), а также формулой (4) (из § 74), находим:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_L x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi ab.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу о выражении площади фигуры в криволинейных координатах (см. § 67).

Пусть имеем две плоскости; на одной из них введем прямоугольную систему координат $\xi\eta$, а на другой — также прямоугольную систему координат xy. На плоскости $\xi\eta$ рассмотрим замкнутую область G, ограниченную кусочно-гладким контуром Γ, а на плоскости xy — замкнутую область D, ограниченную также кусочно-гладким контуром L. Пусть с помощью соотношений

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta) \tag{4}$$

установлено взаимно однозначное соответствие между точками этих областей. Так как области G и D ограничены гладкими кривыми, то они квадрируемы (§ 61). Поставим своей задачей выразить площадь S области D с помощью двойного интеграла, распространенного на область G. При решении поставленной задачи мы будем предполагать, что функции (4) имеют непрерывные частные производные первого порядка в области G и что хотя бы одна из этих функций, например $\psi(\xi, \eta)$, в той же области G имеет непрерывные смешанные производные второго порядка: $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}$ и $\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}$ (которые тем самым будут равны между собой (§ 47)).

Переходя к выводу нужной формулы, прежде всего заметим, что в наших условиях граница Γ области G преобразуется в границу L области D (§ 67), причем, если

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{5}$$

есть параметрические уравнения контура Γ области G, то, подставляя $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в формулы преобразования (4), мы получим параметрические уравнения контура L области D:

$$x = \varphi[\xi(t), \eta(t)], \quad y = \psi[\xi(t), \eta(t)].$$

Поскольку Γ — гладкая кривая, то функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$, а следовательно, и функции $\varphi(t) = \varphi[\xi(t), \eta(t)]$ и $\psi(t) = \psi[\xi(t), \eta(t)]$ имеют на сегменте $[t_0, t_1]$ непрерывные производные. При этом, если при изменении параметра t от t_0 до t_1 точка (ξ, η) на плоскости $\xi\eta$ описывает (в том или ином направлении) замкнутый контур Γ, то соответствующая точка (x, y) на плоскости xy опишет (в некотором направлении) замкнутый контур L. Условимся считать, далее, для определенности, что числа t_0 и t_1 выбраны здесь так, что изменению параметра t от t_0 до t_1 отвечает положительный обход контура L (это, очевидно, всегда возможно сделать, например, меняя в случае надобности t на $t_0 + t_1 - t$). Пользуясь формулой (2) (с. 339) и формулой (3) (§ 74), мы можем площадь S области D записать в следующем виде:

$$S=\int_L x\,dy=\int_{t_0}^{t_1}\varphi[\xi(t),\ \eta(t)]\,\psi_t'[\xi(t),\ \eta(t)]\,dt.$$

Но $\psi_t'[\xi(t),\ \eta(t)]=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta'(t)$ (§ 45, формула 4), и потому

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\varphi[\xi(t),\ \eta(t)]\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\xi'(t)+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta'(t)\right]dt. \tag{6}$$

Так как функции $P=\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ и $Q=\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$, как это следует из условия, непрерывны в G, то существует криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi+\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta=\int_\Gamma\varphi(\xi,\ \eta)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta\right)$$

(считаем его взятым в положительном направлении). Если в подынтегральное выражение этого интеграла внести вместо ξ и η их выражения из (5), то в силу формулы (4) (§ 74) мы можем написать:

$$\int_\Gamma\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi+\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta=\pm\int_{t_0}^{t_1}\varphi[\xi(t),\ \eta(t)]\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\xi'(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta'(t)\right]dt^{*)},$$

откуда (см. (6))

$$S=\pm\int_\Gamma\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi+\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta, \tag{7}$$

где перед интегралом будет знак плюс, если положительному направлению обхода контура Γ при отображении (4) соответствует положительное же направление обхода контура L, и знак минус — в противоположном случае.

Так как по условию частные производные $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}$ и $\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\,\partial\xi}$ существуют и непрерывны в G, то в этой области функции $P=\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ и $Q=\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\varphi(\xi,\ \eta)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}$ и $\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+$

---

*) Знак перед интегралом берется в зависимости от того, пробегает ли точка $(\xi,\ \eta)$ при изменении t от t_0 до t_1 контур Γ в положительном или отрицательном направлении.

$+\varphi(\xi, \eta)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\,\partial\xi}$, и к интегралу из (7) можно применить формулу Грина. По этой формуле найдем (учитывая, что $\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\,\partial\xi}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}$, и потому $\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$):

$$S=\pm\int_\Gamma \varphi(\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi+\varphi(\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta=\pm\iint_{(G)}\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)d\xi\,d\eta=$$

$$=\pm\iint_{(G)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)d\xi\,d\eta=\pm\iint_{(G)}\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\end{vmatrix}d\xi\,d\eta,$$

или

$$S=\pm\iint_{(G)} I(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{8}$$

Применяя к интегралу из (8) теорему о среднем значении ($I(\xi, \eta)$— непрерывная в G функция), получим: $S=\pm\bar{S}\cdot I(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, где $\bar{S}$ — площадь области G, а $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ — некоторая точка этой области. В силу положительности чисел S и $\bar{S}$ заключаем, что знак перед интегралом в (8) совпадает со знаком числа $I(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, т. е. со знаком якобиана $I(\xi, \eta)$ в области G (поскольку он будет знакопостоянен в этой области (§ 67)). Но тогда формулу (8) можно переписать так:

$$S=\iint_{(G)}|I(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta.$$

Требуемая формула получена. Она остается справедливой и для случая, когда Γ кусочно-гладкая кривая.

§ 77. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть в некоторой области D плоскости xOy определены и непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Возьмем в этой области любые две точки A и B (рис. 84). Будем соединять взятые точки различными кусочно-гладкими кривыми L, целиком лежащими в области D, и по ним вычислять криволинейный интеграл

$$\int_L Pdx+Qdy. \tag{1}$$

Мы получим, вообще говоря, различные значения интеграла (1). Но примеры 2, 4 и 5, рассмотренные в § 74, показывают, что в некоторых случаях криволинейный интеграл (1) может иметь

одинаковые значения вдоль всех кривых, соединяющих фиксированные точки A и B.

Если значения криволинейного интеграла (1) по всевозможным кусочно-гладким кривым, целиком лежащим в данной области D и имеющим общее начало и общий конец, одинаковы, то говорят, что этот интеграл в области D не зависит от формы пути интегрирования.

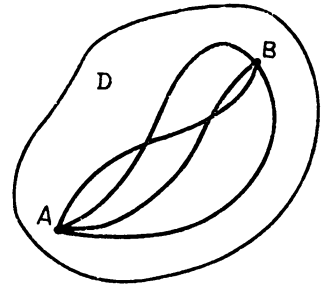


Рис. 84

Возникает, таким образом, вопрос: при каких условиях криволинейный интеграл (1) не зависит от формы пути L интегрирования, а зависит (при заданном подынтегральном выражении $Pdx+Qdy$) только от положения начальной и конечной точек A и B этого пути? К выяснению этих условий мы и перейдем. Прежде всего докажем теорему, которая позволит нам заменить поставленный вопрос равносильным вопросом, решение которого мы затем уже сможем получить.

Теорема 1. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (1) *не зависел от формы пути интегрирования в некоторой области* D, *необходимо и достаточно, чтобы он по всякому замкнутому контуру* C, *не пересекающему себя и целиком лежащему в этой области, равнялся нулю.*

Доказательство. Необходимость условия. Предположим, что значение криволинейного интеграла (1) не зависит от формы пути интегрирования в некоторой области D. Докажем, что в таком случае этот интеграл равен нулю по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области D.

Пусть C — любой, не пересекающий себя замкнутый контур в области D (рис. 85). Возьмем на нем две произвольные точки A и B. Эти точки разобьют контур C на две части ApB и AqB, каждая из которых есть путь, соединяющий точку A с точкой B. Согласно допущению имеем:

$$\int\limits_{ApB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AqB} P\,dx + Q\,dy,$$

откуда

$$\int\limits_{ApB} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{AqB} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

или

$$\int\limits_{ApB} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BqA} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Кривые ApB и BqA в своей совокупности образуют замкнутый контур C, поэтому предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

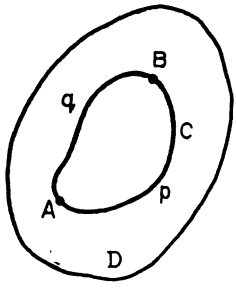


Рис. 85

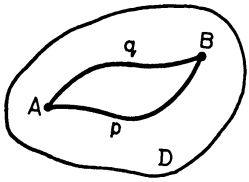


Рис. 86

Достаточность условия. Пусть теперь, наоборот, дано, что интеграл (1) по любому замкнутому контуру, целиком находящемуся в области D, равен нулю. Докажем, что этот интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Возьмем в области D две любые точки A и B. Соединим эти точки двумя различными кривыми, лежащими в области D и не имеющими общих точек (рис. 86). Эти кривые образуют в своей совокупности замкнутый контур $ApBqA$. Согласно условию интеграл (1) по этому контуру будет равен нулю:

$$\int_{ApBqA} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, представим в виде суммы двух интегралов (§ 73, свойство 3):

$$\int_{ApB} P\,dx + Q\,dy + \int_{BqA} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

откуда

$$\int_{ApB} P\,dx + Q\,dy = -\int_{BqA} P\,dx + Q\,dy,$$

или

$$\int_{ApB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AqB} P\,dx + Q\,dy.$$

При доказательстве этого равенства мы предполагали, что кривые ApB и AqB не пересекаются нигде, кроме точек A и B. Однако теорема остается в силе и для случая, когда эти кривые пересекаются. Не доказывая этого в общем случае, мы предположим, что существует такая соединяющая точки A и B кривая AlB (рис. 87), лежащая в области D, которая не пересекает ни ApB, ни AqB*). Тогда по доказанному:

$$\int_{ApB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AlB} P\,dx + Q\,dy, \quad \int_{AqB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AlB} P\,dx + Q\,dy,$$

откуда следует, что и в этом случае $\int_{ApB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AqB} P\,dx + Q\,dy$.

Установленная теорема показывает, что поставленный выше вопрос об условиях независимости интеграла (1) от выбора пути

*) Такой кривой может и не быть (рис. 88).

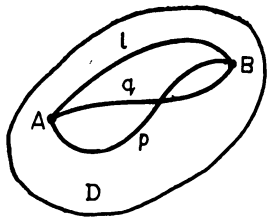


Рис. 87

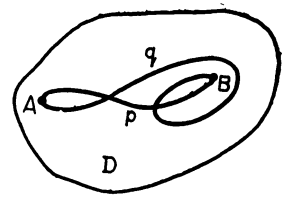


Рис. 88

интегрирования эквивалентен вопросу: при каких условиях данный интеграл обращается в нуль, будучи взят по любому замкнутому контуру, лежащему в области D? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру C, лежащему в области D, был равен нулю:*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Доказательство. Достаточность условия. Предположим, что во всех точках области D выполняется условие (3). Пусть, далее, C — какой угодно замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком находящийся внутри области D. Обозначим через D_1 область, ограниченную этим контуром извне. Так как по условию область D односвязна, то все точки области D_1 принадлежат и области D, в которой функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными. Поэтому к области D_1, ограниченной контуром C, можем применить формулу Грина:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{(D_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

В силу условия (3) $\iint_{(D_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$. Следовательно,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0.$$

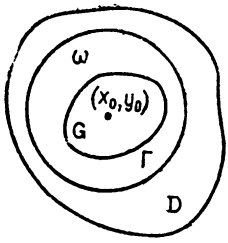


Рис. 89

Необходимость условия. Пусть теперь, наоборот, дано, что выполняется условие (2). Покажем, что тогда в каждой точке области D выполняется равенство (3). Будем доказывать это методом от противного. Допустим, что хотя бы в одной точке (x_0, y_0) области D условие (3) не выполняется, т. е. $\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \neq \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}$, и, следовательно, в этой точке разность $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ имеет значение, отличное от нуля. Пусть для определенности $\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} > 0$.

Тогда, так как по условию функции $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, а значит, и функция $f(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в области D и, в частности, в точке (x_0, y_0), то существует такая окрестность ω точки (x_0, y_0), во всех точках которой выполняется неравенство $f(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} > 0$. Возьмем в этой окрестности какой-нибудь кусочно-гладкий замкнутый контур Γ. Область, ограниченную этим контуром, обозначим через G (рис. 89). Тогда по формуле Грина имеем:

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{4}$$

К двойному интегралу, стоящему в правой части последнего равенства, применим теорему о среднем значении для двойных интегралов (§ 64):

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = f(\xi, \eta)\,u,$$

где $(\xi, \eta) \in G$, а u есть площадь области G. Так как $f(\xi, \eta) > 0$, как значение функции $f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ в одной из точек области $G \subset \omega$, где все значения этой функции положительны и $u > 0$, то $\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$. Но тогда из (4) следует, что для выбранного контура Γ имеем:

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy \neq 0.$$

Итак, вопреки условию, по которому интеграл (2) равен нулю, по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру C, лежащему

в области D, нашелся замкнутый кусочно-гладкий контур Γ, на котором интеграл (2) отличен от нуля. Мы получили противоречие. Таким образом, наше предположение, что, хотя бы в одной точке области D, $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, неверно, и, следовательно, при выполнении условия (2) равенство (3) имеет место в каждой точке области D.

Замечание. Условие односвязности области D при доказательстве теоремы 2 является существенным*). Для многосвязной области эта теорема (в общем случае) не имеет места. Убедимся в этом на следующем примере. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ заданы равенствами: $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$; $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Как легко видеть, эти функции определены и непрерывны на всей плоскости xOy за исключением точки (0, 0). Таким образом, область D определения функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ многосвязная (начало координат выполняет роль «отверстия»).

Найдем $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D.

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$I = \int_L \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy,$$

где L — окружность радиуса a с центром в начале координат:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t.$$

Во всех точках области D выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Однако

$$I = \int_L \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t\,(-a\sin t) + a\cos t\, a\cos t}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,dt = 2\pi \neq 0.$$

Полученный результат объясняется тем, что область D, во всех точках которой выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, неодносвязная, т. е. нарушением выполнения одного из условий теоремы 2.

Сопоставляя теоремы 1 и 2, мы приходим к следствию.

Следствие. *Пусть в замкнутой ограниченной связной области D функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{5}$$

*) Этим условием мы пользовались при преобразовании криволинейного интеграла к двойному по формуле Грина.

не зависел от формы пути AB интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области D выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Действительно, если в области D интеграл (5) не зависит от формы пути AB, то тогда по теореме 1 имеем $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$ для любого кусочно-гладкого замкнутого контура C, лежащего в области D, а отсюда по теореме 2 следует выполнение в области D равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Обратно, если в области D имеет место равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то по теореме 2 выполняется равенство $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$, а отсюда по теореме 1 следует, что интеграл (5) не зависит от формы пути интегрирования.

Если значение криволинейного интеграла оказывается зависящим только от начальной точки $A(x_0, y_0)$ и конечной точки $B(X, Y)$ пути интегрирования, то это свойство интеграла часто отмечают уже в самом обозначении криволинейного интеграла. Именно интеграл, взятый по любой линии, соединяющей точки $A(x_0, y_0)$ и $B(X, Y)$ (от A к B), обозначают в этом случае так:

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(X,\,Y)} P\,dx + Q\,dy, \quad \text{или} \quad \int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy, \quad \text{или} \quad \int\limits_{A(x_0,\,y_0)}^{B(X,\,Y)} P\,dx + Q\,dy.$$

§ 78. ПРИЗНАК ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

В криволинейном интеграле

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{1}$$

подынтегральное выражение

$$P\,dx + Q\,dy \tag{2}$$

напоминает нам выражение полного дифференциала некоторой функции $U(x, y)$ двух переменных: $dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy$. Поэтому возникает вопрос, служит ли выражение (2) полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, т. е. существует ли такая функция $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен (2):

$$dU = P\,dx + Q\,dy.$$

Для функции одной переменной на аналогичный вопрос ответ был положительным: для выражения $f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная на данном сегменте функция, всегда существует функция y,

такая, что $dy = f(x)\,dx$. Такой функцией будет любая первообразная для $f(x)$. В случае функции двух переменных дело обстоит иначе, выражение вида (2) далеко не всегда является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных. Для ряда вопросов математического анализа и его приложений важно иметь критерий, позволяющий судить, является ли выражение (2) в данной области дифференциалом некоторой функции двух переменных, или нет. Этот критерий устанавливается следующей теоремой.

Теорема. *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области D, то необходимым и достаточным условием, при котором выражение (2) в области D представляет полный дифференциал некоторой функции, является тождественное выполнение в этой области равенства*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условия. Предположим, что существует функция $U(x, y)$, такая, что в области D всюду

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy. \tag{4}$$

Покажем, что в этом случае в области D выполняется тождественно равенство (3). Из (4) следует $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Продифференцировав обе части первого из этих равенств по y, а второго по x, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}. \tag{5}$$

Так как частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ по условию теоремы непрерывны в D, то непрерывны в D смешанные частные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$ и, следовательно, в этой области выполняется равенство $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$ (§ 47). Но тогда из (5) следует, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. в области D тождественно выполняется равенство (3).

Достаточность условия. Пусть теперь для выражения (2) во взятой области D соблюдено условие (3). Докажем, что в таком случае существует функция двух переменных, полный дифференциал которой равен выражению (2) в этой области. Действительно, при выполнении условия (3) криволинейный интеграл (1) не зависит от формы кусочно-гладкого пути интегрирования и вполне определяется заданием начальной точки A и конечной

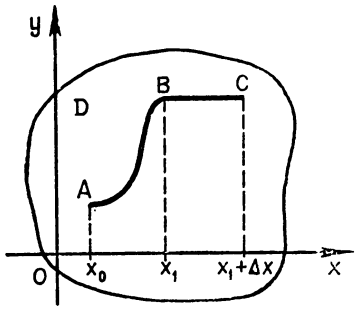


Рис. 90

точки B пути интегрирования. Начальную точку A (x_0, y_0) зафиксируем, а точку B (x, y) будем считать переменной в области D. Тогда криволинейный интеграл (1) будет некоторой функцией от двух переменных x и y, определенной в области D. Обозначим эту функцию через $U(x, y)$:

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Покажем, что функция $U(x, y)$ имеет в области D полный дифференциал и он равен в этой области выражению (2). Пусть теперь $B(x_1, y_1)$ — некоторая фиксированная точка области D. Оставляя y_1 без изменения, дадим x_1 приращение Δx, удовлетворяющее только одному требованию: точка $C(x_1 + \Delta x, y_1)$ принадлежит области D (рис. 90). Соответствующее частное приращение функции $U(x, y)$ будет:

$$\Delta_x U = U(x_1 + \Delta x, y_1) - U(x_1, y_1) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy.$$

Поскольку величина криволинейного интеграла (1) не зависит от формы пути интегрирования, то будем рассматривать интеграл $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy$ по какой-нибудь кусочно-гладкой кривой AB, а интеграл $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} P\,dx + Q\,dy$ — по кривой AC, состоящей из выбранной кривой AB и прямолинейного отрезка BC, параллельного оси Ox (см. рис. 90). При этом

$$\Delta_x U = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} + \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} =$$

$$= \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} P\,dx + \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} Q\,dy.$$

Так как на отрезке BC значение y постоянно, то $\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} Q\,dy = 0$. Следовательно, $\Delta_x U = \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} P(x, y)\,dx$.

Выразим этот криволинейный интеграл через обыкновенный определенный интеграл. Учитывая, что уравнение прямой BC есть $y = y_1$, имеем:

$$\Delta_x U = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x,\ y_1)\,dx.$$

Применяя к полученному обыкновенному интегралу теорему о среднем значении определенного интеграла (т. I, § 99), получим:

$$\Delta_x U = P(x_1 + \theta\Delta x,\ y_1)\Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

Отсюда найдем:

$$\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1 + \theta\Delta x,\ y_1).$$

Устремим теперь Δx к нулю. В силу непрерывности функции $P(x, y)$ в области D имеем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x_1 + \theta\Delta x, y_1) = P(x_1, y_1)$. Следовательно, предел отношения $\frac{\Delta x U}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ также существует. А это означает, что функция $U(x, y)$ в точке (x_1, y_1) имеет частную производную по x: $\frac{\partial U}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x U}{\Delta x}$, причем $\frac{\partial U(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1)$. Поскольку точка (x_1, y_1) была выбрана в области D произвольно, то последнее равенство верно для всех точек этой области, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,\ y),\ (x,\ y) \in D. \tag{6}$$

Совершенно аналогично доказывается, что в любой точке $(x, y) \in D$ существует частная производная $\frac{\partial U}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,\ y). \tag{7}$$

Так как функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D, то в силу равенств (6) и (7) частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ функции $U(x, y)$ также непрерывны в этой области. Отсюда следует, что в каждой точке области D функция $U(x, y)$ дифференцируема и, согласно равенствам (6) и (7), полный дифференциал ее равен

$$dU = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Замечание. Функцию двух переменных $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен подынтегральному выражению (2), часто называют *первообразной* для этого выражения.

Отметим, что найденная выше функция $U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$ является не единственной первообразной для выражения (2).

Такими функциями будут, очевидно, и функции вида $U(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная.

Легко убедиться, что функция $U(x, y) + C$ есть в указанном выше смысле общее выражение первообразной для (2) в области D. В самом деле, пусть $V = V(x, y)$ — любая первообразная для выражения (2) в области D, так что в этой области $dV = P\,dx + Q\,dy$. Но поскольку $U = U(x, y)$ также первообразная для (2), то и $dU = P\,dx + Q\,dy$. Так как функции $V(x, y)$ и $U(x, y)$ имеют дифференциалы, то и функция $V(x, y) - U(x, y)$ имеет дифференциал, причем $d(V-U) = dV - dU = 0$, следовательно (см. с. 200), $V - U = C_0$, откуда

$$V(x, y) = U(x, y) + C_0,$$

т. е. первообразная $V(x, y)$ получается из выражения $U(x, y) + C$ при некотором значении произвольной постоянной $C = C_0$.

Таким образом, если для выражения $P\,dx + Q\,dy$ в некоторой области D известна одна какая-либо первообразная $U(x, y)$, то совокупность всех первообразных этого выражения в D представляется выражением $U(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная.

Следствие. *Если в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области D заданы две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то для того, чтобы криволинейный интеграл* (1) *не зависел от формы пути интегрирования в области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области подынтегральное выражение* (2) *являлось полным дифференциалом некоторой функции двух переменных.*

Действительно, в силу следствия теоремы 2 § 77 и теоремы настоящего параграфа необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла (1) от формы пути интегрирования в односвязной области D и необходимым и достаточным условием того, чтобы выражение (2) в области D было полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, является выполнение в области D одного и того же условия: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Таким образом, вопрос о независимости криволинейного интеграла (1) от формы пути интегрирования равносилен вопросу об условиях, при которых выражение (2) является полным дифференциалом некоторой функции.

§ 79. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛУ

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в данной замкнутой односвязной области D и

пусть во всех точках этой области выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда согласно теореме предыдущего параграфа выражение $P\,dx + Q\,dy$ является в области D полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, причем все такие функции могут быть найдены по формуле:

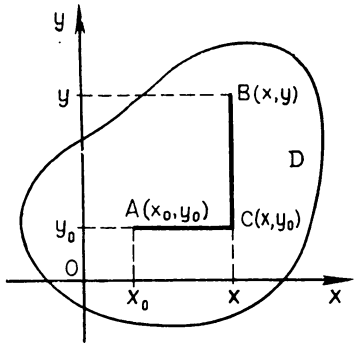


Рис. 91

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy + C, \quad (1)$$

где (x_0, y_0) — произвольно зафиксированная точка в области D, а C — произвольная постоянная.

Как показывает формула (1), для нахождения функции $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу достаточно в области D взять произвольную точку $A(x_0, y_0)$ и, зафиксировав ее, вычислить интеграл $\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} P dx + Q dy$ вдоль кусочно-гладкой линии, лежащей в D и соединяющей точку $A(x_0, y_0)$ с любой другой точкой $B(x, y)$ из области D. Так как значение этого интеграла не зависит от формы пути интегрирования, то мы можем выбрать линию интегрирования каким-либо специальным образом. Вычисление рассматриваемого интеграла часто значительно упрощается, если в качестве линии интегрирования взять ломаную линию, звенья которой параллельны осям координат, например ломаную, соединяющую точки $A(x_0, y_0)$, $C(x, y_0)$ и $B(x, y)$ (рис. 91). (Разумеется, это можно делать только в том случае, если звенья ломаной принадлежат области D.) При таком выборе пути интегрирования имеем:

$$\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{A(x_0, y_0)}^{C(x, y_0)} P(x, y_0)\,dx + \int_{C(x, y_0)}^{B(x, y)} Q(x, y)\,dy.$$

Интегралы, стоящие в правой части последнего равенства, преобразуем к обыкновенным определенным интегралам. Получим (§ 74):

$$\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

Следовательно,

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C. \quad (2)$$

В этой формуле в первом интеграле справа подынтегральное выражение берется при данном $y = y_0$, а во втором — при данном, но произвольном y.

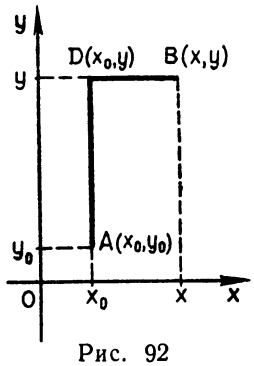


Рис. 92

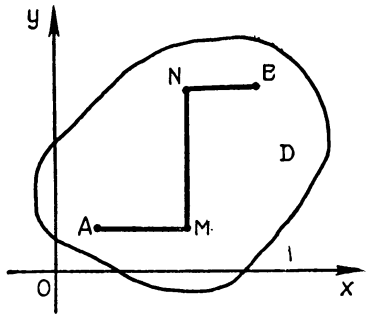


Рис. 93

Аналогично, интегрируя по ломаной линии, соединяющей точки $A\,(x_0, y_0)$, $D\,(x_0, y)$ и $B\,(x, y)$ (рис. 92), получим для $U\,(x, y)$ следующую формулу:

$$U(x,\ y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,\ y)\,dx + C, \qquad (3)$$

также дающую первообразные для $P\,dx + Q\,dy$.

Если окажется, что ломаные ACB и ADB частично выходят за пределы области D, то иногда все же оказывается возможным произвести интегрирование по некоторой ломаной, например, быть может, по ломаной $AMNB$ (рис. 93).

При пользовании формулами (2) и (3) точка (x_0, y_0) в пределах области D может быть взята какой угодно. На практике ее выбирают так, чтобы вычисление интегралов, стоящих в формулах (2) или (3), по возможности упрощалось. Часто бывает удобным взять x_0 или y_0 или x_0 и y_0 равным нулю (если это возможно).

Пример 1. Проверить, является ли в какой-либо области выражение $(3x^2y^2 - y^3 + 4x)\,dx + (2x^3y - 3xy^2 + 5)dy$ полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, и если да, то найти эту функцию.

Р е ш е н и е. Здесь $P = 3x^2y^2 - y^3 + 4x$, $Q = 2x^3y - 3xy^2 + 5$ и $\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y - 3y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y - 3y^2$. Функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на всей плоскости xOy. Так как, кроме того, в каждой точке (x, y) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то условие интегрируемости заданного выражения выполнено на всей плоскости и функция $U\,(x, y)$, полный дифференциал который равен этому выражению, существует (в той же области). Найдем эту функцию по формуле (2), выбрав точку (0, 0) за начальную. Имеем:

$$U(x,\ y) = \int_0^x (3x^2 \cdot 0 - 0 + 4x)\,dx + \int_0^y (2x^3y - 3xy^2 + 5)\,dy + C =$$
$$= 2x^2 + x^3y^2 - xy^3 + 5y + C.$$

Пример 2. Выяснить, является ли выражение

$$\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx-\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \tag{4}$$

полным дифференциалом какой-либо функции, и если да, найти последнюю.

Решение. В данном примере функции $P=\dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$, $Q=-\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$ и их частные производные $P'_y=Q'_x=\dfrac{x(x^2+2y^2)}{y^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ непрерывны в области D, представляющей собой все точки плоскости xOy, исключая точки оси Ox. Для точек области D выполнено условие $P'_y=Q'_x$. Следовательно, выражение (4) является в D полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Выбрав точку (0, 1) в качестве начальной, найдем функцию $U(x, y)$ по формуле (3):

$$U(x,\ y)=\int_0^x\frac{x\,dx}{y\sqrt{x^2+y^2}}-\int_1^y\frac{0+\sqrt{0+y^2}}{y^2\sqrt{0+y^2}}\,dy+C_1=\frac{1}{2y}\int_0^x\frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}-$$

$$-\int_1^y\frac{dy}{y^2}=\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^x+\frac{1}{y}\Big|_1^y+C_1=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}-2+C_1.$$

Окончательно $U(x,\ y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$, где $C=C_1-2$.

Замечание. Мы взяли начальную точку заведомо в одной из четырех областей, на которые линии разрыва (оси координат) разбивают область D. Здесь результат интегрирования будет тем же, если эту точку взять в любой из трех других областей. Однако в общем случае так поступать не рекомендуется: следует рассмотреть все возможные подслучаи отдельно (в соответствии с найденными частями области D, где P_y и Q'_x непрерывны). В отдельных случаях результат можно получить, взяв произвольную точку (x_0, y_0) из области D, не указывая конкретно, к какой части она принадлежит, и убеждаясь в общности ответа самим ходом вычисления.

В заключение этого параграфа рассмотрим одно равенство, которое является для криволинейных интегралов аналогом формулы Ньютона—Лейбница (т I, § 101).

Пусть $U(x, y)$ есть какая-либо первообразная для выражения $P\,dx+Q\,dy$ в области D. Тогда в данной области функция

$$V(x,\ y)=\int_{(x_0\ y_0)}^{(x,\ y)}P\,dx+Q\,dy$$

(где (x_0, y_0) — фиксированная точка из области D, а (x, y) — любая другая точка из этой области) также является первообразной для

выражения $P\,dx + Q\,dy$, причем $V(x, y) = U(x, y) + C_0$, где C_0 — некоторое определенное число.

Для отыскания постоянной C_0 положим в этом тождестве $x = x_0$, $y = y_0$. Замечая, что при этом $V(x_0, y_0) = 0$, получим $0 = U(x_0, y_0) + C_0$, откуда $C_0 = -U(x_0, y_0)$ и, следовательно, $V(x, y) = U(x, y) - U(x_0, y_0)$, или

$$\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx + Q\,dy = U(x,\ y) - U(x_0,\ y_0).$$

Если теперь зафиксировать и конечную точку (x, y), взяв $x = x_1$, $y = y_1$, то получим:

$$\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} P\,dx + Q\,dy = U(x_1,\ y_1) - U(x_0,\ y_0) = U(x,\ y)\Big|_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)}, \quad (5)$$

где $U(x, y)$ — любая первообразная по отношению к подынтегральному выражению.

Формула (5) показывает, что если дифференциальное выражение $P\,dx + Q\,dy$ имеет какую-нибудь первообразную $U(x, y)$, то криволинейный интеграл от этого выражения равен разности значений первообразной в конечной и начальной точках пути интегрирования. Эта формула аналогична основной формуле в интегральном исчислении — формуле Ньютона—Лейбница, выражающей обыкновенный интеграл через первообразную для подынтегральной функции*). В ряде случаев формула (5) позволяет значительно сократить вычисление криволинейных интегралов. Следует только иметь в виду, что формула (5) применима лишь к таким криволинейным интегралам, для которых (см. теорему на странице 349) выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. В связи с этим последнее равенство часто называют *условием интегрируемости* выражения $P\,dx + Q\,dy$. При наличии этого условия операция криволинейного интегрирования может быть рассматриваема как действие, обратное дифференцированию (взятию полного дифференциала).

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int_{(-1,\ 1)}^{(2,\ 3)} (y^2 - x^2)(x\,dx - y\,dy)$.

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральное выражение к виду $P\,dx + Q\,dy$ и найдем P'_y и Q'_x: $P\,dx + Q\,dy = (xy^2 - x^3)\,dx + (yx^2 - y^3)\,dy$, $P'_y = 2xy$, $Q'_x = 2xy$, $P'_y = Q'_x$ для всех x и y. Таким образом, условие интегрируемости выполняется на всей плоскости xOy, и, следовательно, подынте-

*) Этой идеей мы в сущности уже пользовались при решении примеров 5 и 6, § 74.

гральное выражение имеет первообразную. Найдем ее по формуле (3) (выбирая точку (0, 0) за начальную точку пути):

$$U(x, y)=\int_0^x (0-x^3)\,dx+\int_0^y (yx^2-y^3)\,dy+C=-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}+C.$$

Теперь по формуле (5) получаем (выбирая $C=0$):

$$I=\int_{(-1,\,1)}^{(2,\,3)} (y^2-x^2)\,(x\,dx-y\,dy)=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_{(-1,\,1)}^{(2,\,3)}=-\frac{25}{4}.$$

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл

$$I=\int_{(0,\,-1)}^{(1,\,0)}\left[x-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}-y\right]dy$$

в области существования функций $P(x, y)=x-\frac{y^2}{(x-y)^2}$ и $Q(x, y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-y$.

Р е ш е н и е. Здесь $P'_y=Q'_x=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$, т. е. выполняется условие интегрируемости во всех точках плоскости, исключая точки прямой $y=x$. Следовательно, в любой области, не содержащей точек этой прямой, подынтегральное выражение имеет первообразную. Выбирая точку (1, 0) за начальную, найдем (по формуле (2)):

$$U(x, y)=\int_1^x x\,dx+\int_0^y\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}-y\right]dy+C=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{2}-x+C.$$

Применяя формулу (5), получим:

$$I=\int_{(0,\,-1)}^{(1,\,0)}\left[x-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}-y\right]dy+C=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{2}-x\right]_{(0,\,-1)}^{(1,\,0)}=1.$$

Рассмотрим теперь важное приложение формулы (5) к одной из задач механики — к задаче о работе плоского силового поля.

Пусть поле задается силой

$$\vec{F}=P(x, y)\,i+Q(x, y)\,j. \qquad (6)$$

Если существует такая функция $U=U(x, y)$, для которой справедливо равенство

$$dU=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$$

и, следовательно, $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y)$, то поле, заданное силой (6), называется *потенциальным* или *консервативным*. Сама функция $U(x, y)$ называется при этом *силовой* или *потенциальной*, а также *потенциалом поля*.

Мы видели (§ 71), что работа силового поля (6) при перемещении материальной точки в этом поле по кривой AB определяется по формуле:

$$A = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции силы $\vec{F}$ на оси координат.

Для потенциального поля согласно формуле (5) имеем:

$$A = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0). \quad (7)$$

Последнее равенство показывает, что работа A силы в потенциальном поле при движении материальной точки в этом поле равна разности значений потенциала в конце и в начале кривой AB, вдоль которой работает сила, и, следовательно, не зависит от формы кривой. Этот факт имеет большое значение в теории потенциальных полей.

В примере 6 (§ 74) мы имели поле $\vec{F} = -\frac{kmx}{r^3}i - \frac{kmy}{r^3}j$, для которого, как нетрудно сообразить, потенциалом является функция $U(x,y) = \frac{km}{r}$. Действительно, $\frac{\partial U}{\partial x} = km\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -km\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -\frac{kmx}{r^3}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = km\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{y}{r} = -\frac{kmy}{r^3}$. Поэтому работа силы $\vec{F}$ вдоль кривой M_1M_2 имеет значение

$$A = U(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = \frac{km}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния точек M_1 и M_2 от начала координат. Мы получили, конечно, прежний результат, но более коротким путем.

§ 80. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ДЛИНЕ ДУГИ

К понятию криволинейного интеграла по координатам мы пришли, рассматривая задачу о работе силового поля. Решение некоторых других физических задач, как, например, задачи о вычислении массы материальной кривой, координат ее центра тяжести и другие, приводят к необходимости введения другого типа криволинейного интеграла — криволинейного интеграла по длине дуги.

Рассмотрим следующую механическую задачу. Пусть на некоторой плоской спрямляемой дуге AB некоторым образом распределена масса с линейной плотностью ρ*), причем эта плотность зада-

*) Линейной плотностью ρ материальной кривой в точке M называется предел, к которому стремится отношение массы Δm, находящейся на дуге MM' этой кривой, к длине дуги MM' при условии, что длина этой дуги стремится к нулю.

на как некоторая непрерывная функция $\rho = \rho(x, y)$ от координат x и y точки дуги AB (рис. 94). Требуется определить массу m материальной дуги AB.

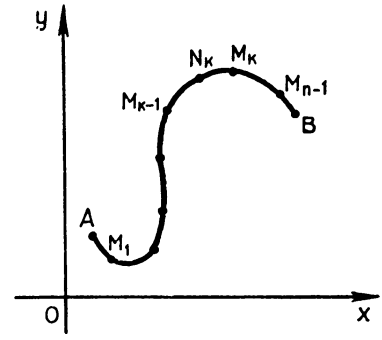


Рис. 94

С этой целью разобьем дугу AB произвольным образом на n частей с помощью точек деления $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$, которые пронумерованы в направлении от A к B. Длину дуги $M_{k-1}M_k$ ($M_0 \equiv A$, $M_n \equiv B$) обозначим через Δs_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). На каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ возьмем произвольно по точке $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и во взятых точках вычислим плотность распределения массы: $\rho = \rho(\xi_k, \eta_k)$. Если предположить, что плотность ρ во всех точках частичной дуги $M_{k-1}M_k$ постоянна и равна ее значению $\rho(\xi_k, \eta_k)$ в точке N_k, то величина массы частичной дуги $M_{k-1}M_k$ будет:

$$\rho(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k.$$

Так как масса всей дуги AB равна сумме масс ее частичных дуг $M_{k-1}M_k$, то при сделанном допущении о постоянстве плотности вдоль частичных дуг масса всей дуги AB выразится суммой:

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k. \tag{1}$$

Поскольку в действительности плотность распределения массы на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$, вообще говоря, не постоянна, то сумма (1) не может быть принята за массу дуги AB. Однако, если частичные дуги весьма малы, то в силу непрерывности функции $\rho(x, y)$ значение плотности ρ в различных точках какой-либо из этих дуг будет весьма мало отличаться от ее значения в произвольно взятой точке (ξ_k, η_k) этой дуги и масса (1) будет имитировать искомую массу дуги, причем тем лучше, чем меньше длина частичных дуг. Станем теперь неограниченно увеличивать число n делений дуги AB и притом так, чтобы λ — наибольшая из длин частичных дуг $M_{k-1}M_k$ стремилась к нулю. Если при этом сумма (1) будет стремиться к определенному пределу m, не зависящему от способа разбиения дуги AB на частичные дуги $M_{k-1}M_k$ и от выбора точек N_k на соответствующих частичных дугах, то этот предел (исходя из указанных выше интуитивных соображений) мы и будем принимать за массу всей дуги AB:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k. \tag{2}$$

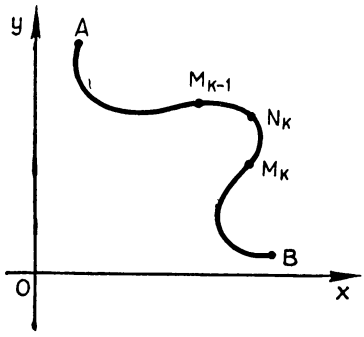


Рис. 95

К нахождению пределов суммы вида (1) приводит решение и многих других задач механики и математики. Поэтому представляется естественным изучить эти суммы, отвлекаясь от конкретного смысла входящих в них переменных величин.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x, y)$, определенную вдоль некоторой плоской спрямляемой дуги AB (рис. 95). Разобьем дугу AB произвольным образом на какое-либо число n частей точками M_1, M_2, ..., M_{k-1}, M_k, ..., M_{n-1}. На каждой частичной дуге возьмем также по произволу точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и, вычислив значение функции $f(x, y)$ в каждой из этих точек, составим сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k. \tag{3}$$

Она называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$, заданной на дуге AB. Очевидно, интегральная сумма (3), вообще говоря, зависит от способа разбиения дуги AB на частичные дуги $M_{k-1}M_k$ и от выбора точек N_k на соответствующих частичных дугах. Будем неограниченно увеличивать число n точек деления дуги AB, однако так, чтобы λ (наибольшая из длин Δs_k получающихся при этом частичных дуг) стремилась к нулю.

Определение. *Если при* $\lambda \to 0$ (*где* λ — *наибольшая из длин частичных дуг*) *интегральная сумма* (3) *имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения дуги* AB *на частичные дуги* $M_{k-1}M_k$, *ни от выбора точек* N_k *на этих частичных дугах, то этот предел называют криволинейным интегралом по длине дуги* AB *от функции* $f(x, y)$.

Криволинейный интеграл по длине дуги обозначается символом:

$$\int_{AB} f(x, y)\,ds.$$

Пользуясь введенным определением, мы можем теперь выражение (2) для массы m дуги AB записать в виде: $m = \int_{AB} \rho(x, y)\,ds$, где $\rho(x, y)$ — плотность распределения массы по дуге AB.

Определение криволинейного интеграла по длине дуги похоже на определение криволинейного интеграла по координатам. Но эти определения имеют и существенные различия. При составлении интегральной суммы в криволинейном интеграле по длине дуги значение $f(\xi_k, \eta_k)$ функции $f(x, y)$ умножается на длину частичной дуги $M_{k-1}M_k$, а в криволинейном интеграле по координатам — на

проекцию упомянутой дуги на соответствующую координатную ось.

Отметим также еще, что в отличие от криволинейного интеграла по координатам величина криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления интегрирования. Действительно, если при составлении интегральной суммы вида (2) мы будем производить нумерацию точек деления дуги AB в направлении от B к A (т. е. в обратном рассмотренному выше), то это не изменит интегральной суммы (2) (величины Δs_k — длины дуг $M_{k-1}M_k$ обязательно положительные, независимо от того, какую точку дуги AB мы считаем начальной, а какую — конечной), а значит, и ее предела, а потому

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\, ds = \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(x, y)\, ds.$$

Заметим, что кривая AB может быть здесь и замкнутой, т. е. точка B может совпадать с точкой A.

Криволинейный интеграл по длине дуги легко преобразуется к обыкновенному определенному интегралу. Установим на кривой определенное направление, например от A к B. Тогда положение любой точки $M(x, y)$ на кривой AB может быть вполне определено длиной s дуги AM. Тем самым координаты x и y точки M также определятся как функции от s, так что будем иметь параметрические уравнения кривой AB (т. I, § 110):

$$x = x(s);\ y = y(s). \tag{4}$$

Очевидно, точке A соответствует значение $s = 0$, а точке B — значение $s = S$, где S — длина дуги AB. Таким образом, параметр s будет изменяться на сегменте $[0, S]$. При этом функция $f(x, y)$, заданная в точках дуги AB, становится сложной функцией от переменной s: $f(x, y) = f[x(s), y(s)]$. Обозначим через s_k значения параметра s, соответствующие точкам M_k деления дуги AB, а через σ_k значения параметра s, отвечающие точкам N_k, произвольно выбранным на дугах $M_{k-1}M_k$. Тогда можно переписать интегральную сумму (3) в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} f[x(\sigma_k), y(\sigma_k)]\, \Delta s_k, \tag{5}$$

где $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$ и $s_{k-1} \leqslant \sigma_k \leqslant s_k$. Очевидно, интегральная сумма (5) соответствует функции $f[x(s), y(s)]$. Так как интегральные суммы (3) и (5) равны между собой

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f[x(\delta_k), y(\delta_k)]\, \Delta s_k,$$

то в случае существования интеграла, соответствующего одной из частей этого равенства, будет существовать и интеграл, соот-

ветствующий другой из этих частей, причем эти интегралы будут равны:

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_0^S f[x(s),\ y(s)]\,ds. \tag{6}$$

Так, например, если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль дуги AB, а функции (4) непрерывны на сегменте $[0, S]$, то определенный интеграл $\int_0^S f\,x[(s), y(s)]\,ds$, очевидно, существует, а значит, существует и криволинейный интеграл $\int_{AB} f(x, y)\,ds$.

Пусть теперь спрямляемая кривая AB (на которой выбрано положительное направление от точки A к точке B) задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{7}$$

где параметр t необязательно есть длина дуги, и функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Для определенности будем считать, что точке A соответствует значение $t = \alpha$, а точке B — значение $t = \beta$, причем при изменении t от α до β точка A пробегает дугу AB в выбранном нами направлении. Тогда длина s дуги AM ($M[x(t), y(t)]$ — переменная точка дуги AB) будет монотонно возрастающей функцией t: $s = s(t)$. При возрастании t от α до β величина $s(t)$ возрастает от 0 до S, причем $ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$. Производя замену переменной в определенном интеграле из (6), получим:

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_0^S f[x(s), y(s)]\,ds =$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\ \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \tag{8}$$

Таким образом, для того чтобы вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} f(x, y)\,ds$, где кривая AB задана параметрическими уравнениями (7), достаточно в подынтегральном выражении положить $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$ и вычислить полученный таким образом определенный интеграл в соответствующих пределах изменения параметра t.

Если, в частности, кривая AB имеет явное задание $y = g(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$ и производная $g'(x)$ непрерывна, то, принимая x за параметр, получаем из (8) следующую формулу:

$$\int_{AB} f(x, y)\,ds = \int_a^b f[x, g(x)]\sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx, \tag{9}$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} (3x - 2\sqrt[3]{a^2 y})\, ds, \qquad (10)$$

где $a > 0$ и AB — часть астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенная в первой четверти (рис. 96).

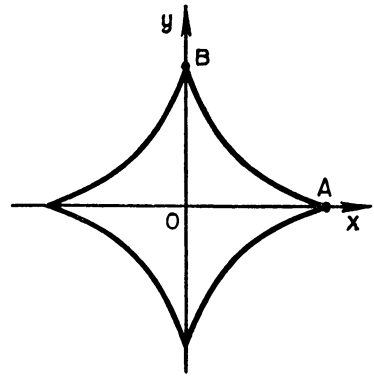


Рис. 96

Р е ш е н и е. Очевидно, точка (x, y) описывает дугу AB астроиды при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Функция $f(x, y) = 3x - 2\sqrt[3]{a^2 y}$ непрерывна в любой точке плоскости xOy и, в частности, вдоль дуги AB, а функции $x = \varphi(t) = a\cos^3 t$, $y = \psi(t) = a\sin^3 t$ непрерывны вместе со своими производными в интервале $(-\infty, +\infty)$, и, в частности, на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; следовательно, криволинейный интеграл (10) существует. Преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный определенный интеграл. Для этого находим: $dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt$, $dy = 3a\sin^2 t \cos t\, dt$,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3a \sin t \cdot \cos t\, dt.$$

Очевидно, точка (x, y) описывает дугу AB астроиды при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Пользуясь формулой (8), находим:

$$I = \int_{AB} (3x - 2\sqrt[3]{a^2 y})\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a\cos^3 t - 2a\sin t)\, 3a \sin t \cos t\, dt =$$

$$= \left[-\frac{9a^2}{5}\cos^5 t - 2a^2 \sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^2}{5}.$$

Пример 2. Найти массу дуги кривой $y = e^x$ между точками A и B, для которых $x_A = 0$ и $x_B = 2$, если в каждой точке дуги AB линейная плотность пропорциональна квадрату ординаты.

Р е ш е н и е. Здесь $y' = e^x$, $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$, $\rho(x, y) = ky^2$ $(k > 0)$. Применяя формулу (9), находим:

$$m = \int_{AB} ky^2\, ds = k \int_0^2 e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = \frac{k}{3}\left(1 + e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{k}{3}\left[\left(1 + e^4\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right].$$

З а м е ч а н и е. Понятие криволинейного интеграла по дуге, так же как и понятие криволинейного интеграла по координатам, легко распространяется на случай функции трех аргументов, заданной вдоль спрямляемой пространственной кривой. Ввиду отсутствия здесь новых принципиальных моментов мы на этом останавливаться не будем.

ГЛАВА XII.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Часто при изучении многих процессов, протекающих в природе, бывает затруднительно непосредственно установить зависимость между функциями, характеризующими те или иные величины, определяющие количественно данный процесс, но зато в целом ряде случаев оказывается возможным обнаружить связь между теми же функциями и их производными. Это приводит к уравнениям, содержащим неизвестные функции под знаком производных, т. е. к *дифференциальным уравнениям**). В таком случае расчет количественной стороны течения изучаемого процесса сводится к изучению этих уравнений. Отрасль математического анализа, изучающая дифференциальные уравнения, является одной из самых важных по своим приложениям.

§ 81. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение неизвестной функции $y = \varphi(x)$ по данной ее производной $f(x)$ является, как мы знаем (т. I, § 85, 86), основной задачей интегрального исчисления. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

относительно неизвестной функции y. Рассматриваемую задачу легко обобщить. С этой целью вспомним, что при дифференцировании неявных функций мы получали выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в виде функции $f(x, y)$, содержащей не только аргумент x, но и функцию y. В таком случае задача будет состоять в нахождении функции y, удовлетворяющей уравнению $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ или, в более общем случае, уравнению

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

*) Простейшие дифференциальные уравнения встречались уже в конце XVII века в работах Ньютона и Лейбница (сам термин «дифференциальные уравнения» принадлежит Лейбницу).

(где F — некоторая функция трех аргументов), связывающему аргумент x, неизвестную функцию y и ее производную y'. Очевидно, уравнение (1) есть частный случай уравнения (2).

Можно рассмотреть и более общую задачу: найти функцию y от аргумента x, удовлетворяющую соотношению, которое содержит аргумент x, неизвестную функцию y и ее последовательные производные до некоторого порядка n включительно, т. е. соотношению вида:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

где F — данная функция от $(n + 2)$ аргументов, рассматриваемая в некоторой области определения. В частных случаях функция F может явно не зависеть от любого из аргументов x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$ (или даже от всех этих аргументов), но непременно должна зависеть от аргумента $y^{(n)}$.

Определение. *Уравнение относительно некоторой неизвестной функции, которое непременно содержит**) *хотя бы одну из производных этой функции, называется дифференциальным уравнением, т. е. дифференциальным уравнением называется всякое соотношение вида* (3).

Дифференциальное уравнение (3) называется *обыкновенным* потому, что оно содержит только «обыкновенные» производные — производные от функции одной переменной. Вообще же нередко приходится рассматривать и дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции нескольких независимых переменных, содержащие частные производные этой функции. Такие дифференциальные уравнения называются уравнениями в *частных производных*.

В последующих главах (кроме главы XVI) мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения**).

Для дифференциальных уравнений вводится понятие порядка уравнения. Наивысший из порядков производных, входящих в данное дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого *уравнения*. Так, уравнение (1) является дифференциальным уравнением первого порядка, а уравнение (3) — дифференциальным уравнением n-го порядка.

В настоящей главе мы будем рассматривать только дифференциальные уравнения первого порядка и притом разрешенные относительно производной, т. е. уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{4}$$

---

*) Употребляя здесь выражение «содержит производную», мы имеем в виду, что функцию $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ нельзя заменить тождественно равной ей функцией, не содержащей производной.

**) Слово «обыкновенное» мы будем в дальнейшем почти всегда опускать (а часто и слово «дифференциальное»).

где $f(x, y)$ — данная функция. Это уравнение можно переписать в виде соотношения между дифференциалами:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0.$$

Его также называют дифференциальным уравнением только, как говорят, в *дифференциальной форме*. Умножив обе части последнего уравнения на некоторую функцию $N(x, y)$, мы получим уравнение, более симметричное относительно x и y:

$$M(x, y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{5}$$

где $M(x, y) = -f(x, y)\,N(x, y)$. В такую запись дифференциального уравнения переменные x и y входят равноправно: заранее не предрешается вопрос о том, какое из них считать независимым переменным и какое функцией. В дальнейшем уравнение (5) мы будем иногда для краткости записывать так: $M\,dx + N\,dy = 0$.

При соответствующих ограничениях мы можем дифференциальному уравнению (5) придать один из двух удобных для нас видов:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \text{ (при } N(x,y) \neq 0), \text{ или } \frac{dx}{dy} = -\frac{N}{M} \text{ (при } M(x,y) \neq 0). \tag{6}$$

В последней записи переменное y рассматривается как независимое переменное, а x — как неизвестная функция.

Заметим, что если уравнения (6) рассматривать на их общей области определения, то они будут эквивалентны на ней, так как в этой области они оба эквивалентны уравнению (5).

Предположим, что правая часть уравнения (4), т. е. функция $f(x, y)$, имеет область определения D. Введем следующее ***Определение:*** *функция $y = \varphi(x)$, определенная вместе со своей производной в некоторой области L изменения аргумента x (причем $(x, y) \in D$,) называется решением дифференциального уравнения (3) в этой области L, если эта функция, будучи подставлена в уравнение (3), обращает его в тождество на данной области L:*

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f[x, \varphi(x)].$$

Если функция $y = \varphi(x)$ есть решение данного дифференциального уравнения, то говорят, что $\varphi(x)$ удовлетворяет этому уравнению.

Например, функция $y = \varphi(x) = e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{7}$$

на $(-\infty, +\infty)$. Действительно, здесь на $(-\infty, +\infty)$ $y' = \varphi'(x) = e^x$; функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ определены на интервале $(-\infty, +\infty)$. При подстановке $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ в уравнение (7) соответственно вместо y и $\frac{dy}{dx}$ оно обращается в тождество ($e^x \equiv e^x$).

Пример 1. Дано уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0). \tag{8}$$

Функция $x = \ln|y|$ $((-\infty, 0) \cup (0, \infty))$*) является решением уравнения (8). Действительно, $\frac{dx}{dy} = \frac{d \ln|y|}{dy} = \frac{1}{y}$, и уравнение (8) обращается в тождество: $\frac{1}{y} \equiv \frac{1}{y}$.

Пример 2. Дано дифференциальное уравнение $y' = -x^2$. В правой части его не содержится y. Функция $y = \varphi(x) = -\frac{x^3}{3}$ $(-\infty, +\infty)$ является решением данного уравнения. В самом деле, $\varphi'(x) = -x^2$, и мы приходим к тождеству: $-x^2 \equiv -x^2$.

Пример 3. Дано дифференциальное уравнение $y' = 5$.

Правая часть этого уравнения не содержит x и y. Легко видеть, что функция $y = \varphi(x) = 5x$ $(-\infty, +\infty)$ удовлетворяет рассматриваемому уравнению.

Но дифференциальное уравнение может иметь и не одно решение. Так, нетрудно видеть, что решениями дифференциального уравнения (7), кроме функции $y = e^x$, будут и функции $y = 2e^x$, $y = -7e^x$, $y = \sqrt{2}e^x$ и вообще функции вида $y = Ce^x$, где C — любое действительное число.

Таким образом, дифференциальному уравнению может удовлетворять несколько различных функций, и притом даже бесконечное множество их.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.

Операцию отыскания решений дифференциального уравнения часто называют *интегрированием уравнения*, так как в ряде случаев решение дифференциальных уравнений сводится к интегрированию функций. При этом, чтобы различать термин «интегрирование уравнения» от термина «интегрирование функций», операцию вычисления неопределенного интеграла часто называют *«квадратурой»*.

Вернемся снова к дифференциальному уравнению (1). Из интегрального исчисления мы знаем, что все функции, удовлетворяющие этому уравнению, или, как мы теперь скажем, все решения этого уравнения даются (на некотором промежутке) формулой: $y = \int f(x)dx + C$, где символ $\int f(x)dx$ означает какую-нибудь одну из первообразных для $f(x)$, а C есть произвольная постоянная. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, и все они отличаются друг от друга только различными постоянными слагаемыми.

---

*) Здесь и в дальнейшем мы будем иногда область определения функции записывать в скобках, вслед за записью ее аналитического выражения.

Рассмотренные примеры показывают, что иногда для уравнения первого порядка существует такая функция переменных x и C, что при фиксированных значениях C*) мы получим функцию одного переменного x, являющуюся решением этого уравнения.

§ 82. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Факт множественности решений дифференциального уравнения первого порядка помогает уяснить геометрическая интерпретация этого уравнения и его решений. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ определена на некотором множестве D, и пусть $y = \varphi(x)$ — решение этого уравнения. Выясним геометрический смысл дифференциального уравнения (1) и его решения.

На плоскости xOy решению $y = \varphi(x)$, как уравнению с двумя неизвестными, будет соответствовать некоторая кривая — график этого уравнения. Эта кривая называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения, соответствующей взятому решению. Часто и саму эту интегральную кривую называют решением дифференциального уравнения.

В каждой точке (x, y) множества D мы можем вычислить значение функции $f(x, y)$; если это значение равно y', то оно есть угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через взятую точку (x, y). Следовательно, заданием уравнения (1) любой точке (x, y) множества D сопоставляется некоторое направление, определяемое условием $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$, причем оно будет направлением касательной к некоторой, проходящей через эту точку интегральной кривой уравнения (1). В этом смысле говорят, что задаваемое уравнением (1) сопоставление определяет некоторое *поле направлений*. Его изображают графически, помещая в каждой точке $(x, y) \in D$ «стрелку», наклоненную к оси Ox под углом $\alpha = \operatorname{artg} f(x, y)$ (рис. 97).

Мы предполагали выше, что $f(x, y)$ определена в каждой точке множества D. Если же в какой-нибудь точке M_0 множества D функция $f(x, y)$ не определена, но имеет в ней бесконечный предел, то в этой точке угловой коэффициент касательной не существует. Если, однако, $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = +\infty$ $(-\infty)$, то мы будем считать, что в такой точке M_0 поле направлений будет представлено стрелкой, параллельной оси Oy (и что угол α с положительным направлением оси Ox равен $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$). В этом случае угол β «стрелки»

*) Хотя, быть может, и не при всех (см. с. 374).

с положительным направлением оси Oy равен нулю или π и $\operatorname{tg}\beta$ (угловой коэффициент по отношению к оси Oy) также равен нулю.

В соответствии с этим мы будем наряду с уравнением (1) рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \qquad (2)$$

и искать решение его (интегральную кривую) в виде $x = \psi(y)$.

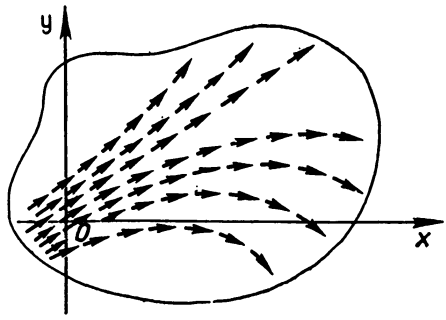


Рис. 97

В общей части E своих областей определения уравнения (1) и (2) эквивалентны, и, следовательно, уравнения (1) и (2) на E имеют одни и те же интегральные кривые. Собственно говоря, дополняя уравнение (1) уравнением (2), мы здесь фактически рассматриваем объединяющее их уравнение

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (3)$$

и занимаемся именно его полем направлений (объединяющим поля направлений, задаваемых уравнениями (1) и (2)).

Таким образом, задача отыскания какого-либо из решений уравнений (1), (2) (или, что то же, какого-либо решения уравнения (3)) заключается в нахождении такой кривой, чтобы касательная в любой ее точке $(x, y) \in D$ имела направление, совпадающее с направлением поля, заданного одним из уравнений (1), (2) (уравнением (3)) в этой точке. Если такая кривая существует, то это есть интегральная кривая уравнения (3), т. е. по крайней мере одного из уравнений (1), (2).

Чтобы по данному полю направлений начертить интегральную кривую, надо взять в части D плоскости xOy ту или иную точку (x_0, y_0) за начальную и провести через нее линию так, чтобы расставленные на поле стрелки показывали в каждой точке направление касательной к искомой интегральной кривой. Так как построение интегральной кривой можно начать с любой точки множества D, то мы будем иметь целый ряд, или, как говорят, *семейство интегральных кривых*.

При построении поля направлений бывает полезно определить предварительно те линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Такие линии называются *изоклинами* поля направления.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x^2 + y^2. \qquad (4)$$

Здесь функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ определена всюду, следовательно, данное уравнение задает поле направлений на всей плоскости xOy. Построим его.

Обозначим через α угол наклона к оси Ox касательной к некоторой интегральной кривой уравнения (4). Тогда, если $\alpha = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = 0 = y'$.

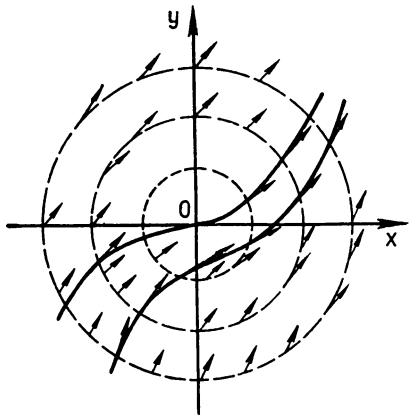


Рис. 98

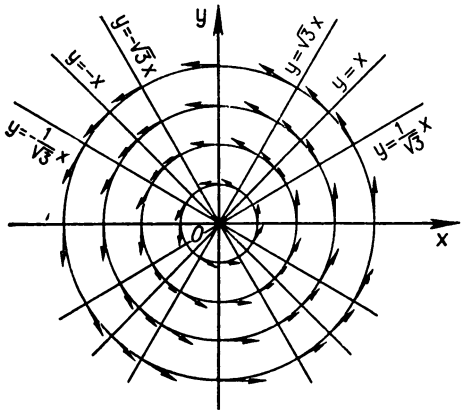


Рис. 99

Но $y' = x^2 + y^2$, значит, $x^2 + y^2 = 0$, откуда $x = y = 0$ (начало координат). Если $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = y'$ и изоклина имеет уравнение $x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (окружность радиуса $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}$ с центром в начале координат). Изоклина, в точках которой $\alpha = \frac{\pi}{4}$, т. е. $y' = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, имеет уравнение $x^2 + y^2 = 1$ и т. д.

Таким образом, изоклинами данного поля направлений являются окружности, имеющие общий центр в начале координат. Чтобы по данному полю направлений начертить (приближенно) интегральную кривую, надо взять на плоскости xOy некоторую точку (x_0, y_0) и вести через нее линию, так чтобы она в каждой своей точке имела направление поля. На рисунке 98 изображены интегральные кривые, проходящие через точки $(0, 0)$ и $(0, -\frac{1}{2})$. Очевидно, данное дифференциальное уравнение будет иметь не две, а целое семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра (за параметр можно принять, например, отрезок, отсекаемый кривой на оси Oy).

Пример 2. С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{1}$$

Решение. Так как функция $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ не определена в точках $(x, 0)$, то наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) задают своим объединением поле направлений во всех точках (x, y), за исключением начала координат. Найдем изоклины данного поля направлений. Пусть α — угол наклона к оси Ox интегральной кривой одного из уравнений (1), (2). Полагая $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°,$

135°, 150°, найдем соответствующие этим значениям α уравнения изоклин поля направлений:

$$x = 0,\ y = -\sqrt{3}x,\ y = -x,\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = 0,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = x,\ y = \sqrt{3}x.$$

Таким образом, изоклинами здесь являются полупрямые, выходящие из начала координат. На рисунке 99 стрелками изображено поле направлений, определяемое объединением уравнений (1) и (2). Поле направлений показывает, что интегральные кривые в данном случае суть концентрические окружности с центром в начале координат. Через точку (0, 0) не проходит ни одна интегральная кривая. В точках пересечения интегральных кривых с осью Ox касательные параллельны оси Oy; это согласуется с направлением поля, задаваемого уравнением (2).

§ 83. ОБРАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИСКЛЮЧЕНИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ

Пусть дано соотношение

$$y = \varphi(x, C), \tag{1}$$

определяющее семейство функций, зависящее от одного параметра C. Поставим вопрос, нельзя ли построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция (1) при любых допустимых значениях параметра C?

Предположим, что функция $\varphi(x, C)$ имеет непрерывные частные производные по x и C. Дифференцируя соотношение (1) по x, находим:

$$y' = \varphi'_x(x, C). \tag{2}$$

Так как предполагается, что C в (1) содержится существенно*), то должно быть: $\varphi'_C(x, C) \not\equiv 0$, и, следовательно, на основании теоремы § 52 мы можем в некоторой окрестности точки (x, C) для которой $\varphi'_C(x, C) \not\equiv 0$, определить C из (1) как функцию от x и y:

$$C = \psi(x, y). \tag{3}$$

Подставляя выражение для C из (3) в (2), получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi'_x[x, \psi(x,y)] \tag{4}$$

Функция (1) является решением уравнения (4) при любом допустимом значении параметра C. В самом деле, поскольку значение $C = \psi(x, y)$ найдено из равенства (1), то имеет место тождество (по переменным x и C): $\psi[x, \varphi(x, C)] \equiv C$ и, значит, $\varphi'_x\{x, \psi[x, \varphi(x, C)]\} = \varphi'_x(x, C)$. Заметив это, подставим выражение для y и y' из (1) в уравнение (4), тогда получим: $\varphi'_x(x, C) \equiv \varphi'_x(x, C)$ —

*) То есть не существует в области определения функции (1) (как функции двух переменных) тождественно ей равной функции одной переменной x.

тождество по переменным x и C. Следовательно, равенство (4) является тем дифференциальным уравнением, для которого функция (1) служит решением при любом допустимом значении параметра C. Это уравнение называют *дифференциальным уравнением семейства кривых* (1): оно описывает обычно некоторое геометрическое свойство, общее для всех кривых данного семейства. Операция получения из равенства (1) равенства (4) называется исключением параметра C (из (1) и (2)).

Найдем, например, дифференциальное уравнение семейства кривых $y = Cx^2$. Дифференцируя y по x, имеем: $y' = 2Cx$. Исключив C из данного и полученного уравнений, найдем: $y' = \frac{2y}{x}$. Полученное дифференциальное уравнение имеет смысл во всякой точке (x, y), где $x \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Получение дифференциального уравнения исключением C дает нам новый способ проверки решения дифференциального уравнения: функция $y = \varphi(x, C)$ будет решением уравнения $y' = f(x, y)$, если после исключения произвольной постоянной путем дифференцирования мы получим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ (или ему равносильное).

§ 84. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения, а также описанный способ образования дифференциального уравнения путем исключения произвольного постоянного (и, наконец, примеры, рассмотренные в § 81) дают нам основание ожидать, что дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

имеет, вообще говоря, не одно, а бесконечное множество решений, а именно, что общее решение этого уравнения дается формулой:

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

содержащей одно произвольное постоянное C. При этом постоянное C должно входить в формулу (2) таким образом, чтобы из этой формулы при различных значениях C могли быть получены все*) решения уравнения (1).

С геометрической точки зрения общее решение (2) представляет собой семейство интегральных кривых дифференциального уравнения (1), зависящее от одного параметра C.

Всякое решение, которое получается из общего решения (2), если

*) В некоторых случаях, как мы увидим, могут быть отдельные решения, не укладывающиеся в формулу (2), о которой тем не менее и в этом случае говорят, что она выражает общее решение уравнения (1). Точные формулировки, относящиеся к понятию общего решения уравнения (1), будут даны в § 91.

произвольному постоянному C дать определенное числовое значение, называется *частным решением* уравнения (1).

Например, функция $y = \frac{x^2}{2} + C$ есть общее решение уравнения $y' = x$, а функции $y = \frac{x^2}{2} + 3$ и $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{15}$ — частные решения этого уравнения.

Обычно для получения частного решения из общего требуют, чтобы искомая функция y при некотором значении x_0 аргумента x принимала заданное значение y_0. При этом число x_0 называется начальным значением аргумента (независимой переменной), а число y_0 — начальным значением искомой функции. В совокупности же числа x_0, y_0 называются *начальными данными* (или *начальными значениями*) решения; условия, указывающие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называются *начальными условиями* решения. Кратко это записывается так: $y_{x=x_0} = y_0$. Из этих условий и определяется соответствующее значение параметра C: подставляя начальные данные в (2), получим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ для определения C.

Нахождение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям x_0, y_0, является одной из основных задач теории дифференциальных уравнений первого порядка. Эта задача называется *задачей Коши*.

Так как с геометрической точки зрения задание начального условия означает задание «начальной точки» (x_0, y_0) на плоскости xOy, то геометрически задачу Коши можно высказать так: среди всех интегральных кривых уравнения (1) найти ту, которая проходит через заданную в некоторой области D точку (x_0, y_0).

В главе XIII будет доказано, что при определенных ограничениях, налагаемых на правую часть уравнения (1), т. е. функцию $f(x, y)$, решение задачи Коши существует.

Нередко в процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения (1) приходят к уравнению, содержащему произвольное постоянное C и не разрешенному относительно y, т. е. к соотношению вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

определяющему (в некоторой области) y как неявную функцию от x и C. При этом выразить y из (3) явно через элементарные функции не всегда возможно, тем не менее и в таких случаях общее решение уравнения (1) мы будем считать известным (в смысле существования функции y). Равенство вида (3) при этом называют *общим интегралом* дифференциального уравнения (1). Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, получаемое из (3) при допустимом частном значении C_0 произвольного постоянного C, называют *частным интегралом* этого уравнения. Так, например, для дифференциального уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{4}$$

соотношение $x^2 + y^2 - C = 0$, где $C > 0$ — произвольная постоянная, есть общий интеграл (для $|x| > \sqrt{C}$): по правилу дифференцирования неявной функции из приведенного соотношения находим $y' = -\frac{x}{y}$, и, подставляя найденное значение y' в уравнение (4), получим тождество: $-\frac{x}{y} \equiv -\frac{x}{y}$.

Для того чтобы из общего интеграла (3) выделить тот частный интеграл, который удовлетворяет начальным данным x_0 и y_0, надо в общий интеграл (3) подставить вместо x значение x_0, а вместо y — значение y_0 и из полученного уравнения $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$ определить $C = C_0$ (предполагается, что это уравнение однозначно разрешимо относительно C). Так, например, частный интеграл уравнения (4), удовлетворяющий начальным условиям $y_{x=3} = 4$, будет $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Замечание. Равенство $x^2 + y^2 - C = 0$ может определять y как (ту или иную) действительную функцию x лишь при условии, что $C > 0$. Таким образом, действительно (ср. с. 368), общее решение (общий интеграл) является источником для получения частных решений (частных интегралов) до тех пор, пока значения, приписываемые параметру C, принадлежат некоторой области определения (в нашем примере — это $(0, +\infty)$).

Общий метод (удобный на практике) для отыскания решений дифференциального уравнения (1) неизвестен, поэтому приходится разделять уравнения этого вида на классы (типы) и искать способы решения для каждого класса уравнений в отдельности. Ниже мы рассмотрим несколько типов дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной y', решение которых выражается в квадратурах.

§ 85. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y), \tag{1}$$

т. е. если его правую часть можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых является функцией только от x, а другая — функцией только от y (в частности, разумеется, может быть $\varphi(x) = \text{const}$ или $\psi(y) = \text{const}$).

Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны соответственно в промежутках (a, b), (c, d)*) и что $\psi(y) \neq 0$.

Уравнение рассматриваемого вида решается обычно следующим образом. Представляя y' как частное $\frac{dy}{dx}$ от деления дифферен-

*) В частности, эти промежутки могут быть бесконечными.

циалов dy и dx, умножая затем обе части уравнения (1) на dx и деля на $\psi(y)$, запишем его в таком виде:

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

В полученном уравнении в одной его части находится только функция от x и dx, а в другой — только функция от y и dy, т. е., как говорят, переменные разделены. Функции $\frac{1}{\psi(y)}$ и $\varphi(x)$ непрерывны в соответствующих промежутках, следовательно, они имеют первообразные. Обозначим одну из первообразных функций от $\frac{1}{\psi(y)}$ через $\Phi(y)$, а одну из первообразных функций от $\varphi(x)$ — через $F(x)$, тогда $\Phi(y) = \int \frac{dy}{\psi(y)}$*), $F(x) = \int \varphi(x)\,dx$. Если теперь в (2) $y = y(x)$ обозначает решение уравнения (1) на (a, b), то соотношение (2) является тождеством и потому для $a < x < b$ имеем: $\Phi'(y)\,dy = F'(x)\,dx$, или $d\Phi(y) = dF(x)$. Из этого тождества заключаем, что функции $\Phi(y)$ (где $y = y(x)$) и $F(x)$ различаются только постоянным слагаемым: $\Phi(y) = F(x) + C$, или

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\,dx + C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная. Мы получили соотношение (3), связывающее решение y уравнения (1), независимое переменное x и произвольное постоянное C. Это соотношение представляет общий интеграл уравнения (1). В самом деле, соотношению (3) удовлетворяют все решения уравнения (1). Обратно, если мы найдем некоторую дифференцируемую функцию $y(x)$, которая при всех x из промежутка (a, b) удовлетворяет соотношению (3), то эта функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению (1). Действительно, пусть дифференцируемая функция $y(x)$ при подстановке в (3) дает тождество, которое можно записать в виде:

$$\Phi(y) - F(x) \equiv C.$$

Дифференцируя это тождество, получим $\Phi'[y(x)]y'(x) - F'(x) \equiv 0$. Вспоминая, что $\Phi'(y) = \frac{1}{\psi(y)}$, $F'(x) = \varphi(x)$, найдем: $\frac{1}{\psi(y)}\,y'(x) - \varphi(x) = 0$ или $y' = \varphi(x)\,\psi(y)$, а это и означает, что $y(x)$ является решением уравнения (1).

Если удастся разрешить соотношение (3) относительно искомой функции, то получим решение уравнения (1) в явном виде (общее решение). Однако необходимо помнить, что соотношение (3) определяет решение уравнения (1), быть может, не при любом C, а лишь в некоторой области его изменения.

---

*) Соотношение $\int \frac{dy}{\psi(y)} = \Phi(y)$ справедливо, так как равенство $d\Phi(y) = \frac{1}{\psi(y)}\,dy$ выполняется и тогда, когда y — функция от x.

С помощью определенных интегралов общий интеграл (3) можно записать в виде:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\psi(y)} = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + C. \qquad (4)$$

Если задано начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$, то из (4) найдем:

$$C = \int_{y_0}^{y_0} \frac{dy}{\psi(y)} - \int_{x_0}^{x_0} \varphi(x)\,dx = 0,$$

и интеграл, определяющий решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, будет:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\psi(y)} = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx.$$

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = (y^2 + 1)\cos x$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Здесь $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(y) = y^2 + 1$. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны всюду и $\psi(y) \neq 0$. Разделяя переменные, получим: $\frac{dy}{y^2+1} = \cos x\,dx$. Интегрируя, находим $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \cos x\,dx$, или

$$\operatorname{arctg} y = \sin x + C - \qquad (5)$$

общий интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения.

Решая уравнение (5) относительно y, получим общее решение данного дифференциального уравнения: $y = \operatorname{tg}(\sin x + C)$.

Если заданы начальные условия $y_{x=x_0} = y_0$, то по (5) можно определить постоянную C_0: $\operatorname{arctg} y_0 = \sin x_0 + C_0$, откуда $C_0 = \operatorname{arctg} y_0 - \sin x_0$. Следовательно, соответствующий частный интеграл рассматриваемого уравнения будет $\operatorname{arctg} y = \sin x + \operatorname{arctg} y_0 - \sin x_0$ и частное решение: $y = \operatorname{tg}(\sin x + \operatorname{arctg} y_0 - \sin x_0)$.

З а м е ч а н и е 1. Может случиться, что при решении некоторых дифференциальных уравнений неопределенные интегралы $\int \frac{dy}{\psi(y)}$ и $\int \varphi(x)\,dx$ (один или оба) нельзя выразить в конечном виде через элементарные функции и, следовательно, нельзя будет выразить в этом смысле общее решение уравнения в виде, не содержащем действий интегрирования. Тем не менее и в этом случае задача интегрирования уравнения считается выполненной в том смысле, что она сведена к более простой и уже изученной в интегральном исчислении задаче — задаче вычисления неопределенных интегралов от заданных функций (к квадратурам).

Пример 2. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = e^{-y^2}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

Р е ш е н и е. Разделяя переменные, находим: $e^{y^2}dy = \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. Интегрируя, получаем: $\int e^{y^2}dy = \int \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx + C$.

Интегралы $\int e^{y^2}dy$ и $\int \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ не выражаются в элементарных функциях, однако задача интегрирования данного уравнения считается выполненной, ибо она сведена к квадратурам.

Прикладное значение теории дифференциальных уравнений состоит в том, что решение многих задач физики, техники и ряда других теоретических и прикладных наук приводит к составлению и последующему интегрированию дифференциальных уравнений самых разнообразных видов. Рассмотрим теперь две задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Задача 1. Как установлено экспериментальным путем, скорость распада радия пропорциональна наличному количеству нераспавшегося радия. Известно, что половина первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Считая, что начальное количество радия равно x_0, найти зависимость количества нераспавшегося радиоактивного вещества x от времени t.

Р е ш е н и е. Скорость изменения функции x (скорость радиоактивного распада) в зависимости от времени t равна производной $\frac{dx}{dt}$. По условию

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \tag{6}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Так как с возрастанием t количество радия x в результате распада уменьшается, то x есть убывающая функция от t, и, следовательно, $\frac{dx}{dt} < 0$, и поэтому (так как $k > 0$ и $x > 0$) в правой части равенства (6) поставлен знак минус.

Дифференциальное уравнение (6) — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем их:

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt.$$

Интегрируя, находим $\ln x = -kt + C_1$, откуда $x = e^{-kt+C_1}$, или, обозначая e^{C_1} через C, получаем:

$$x = Ce^{-kt} —$$

общее решение уравнения (6).

Постоянную интегрирования можно определить из условия, что в начальный момент количество радия было равно x_0. Положим, что начальному моменту соответствует значение $t = 0$. Полагая тогда в общем решении $t = 0$, $x = x_0$, находим: $C = x_0$. Следовательно, частное решение, отвечающее начальным условиям, будет: $x = x_0e^{-kt}$.

Коэффициент k пропорциональности определим из условия, что при $t = 1600$, $x = \frac{x_0}{2}$. Будем иметь: $\frac{x_0}{2} = x_0e^{-k1600}$, откуда

$$k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0{,}00043.$$

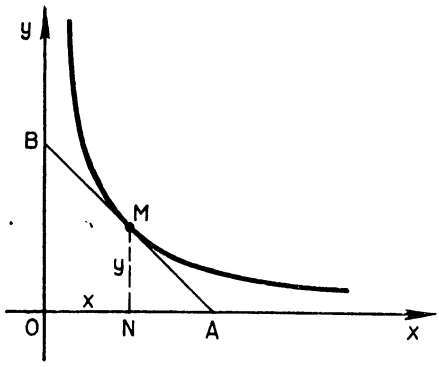


Рис. 100

Таким образом, зависимость количества нераспавшегося радиоактивного вещества от времени выражается уравнением:

$$x = x_0 e^{0,00043t}, \qquad (7)$$

где x_0 — первоначальное количество радия при $t = 0$.

Пользуясь формулой (7), определим, какое количество радия осталось нераспавшимся, например, через 300 лет после начала опыта. Полагая в (7) $t = 300$, будем иметь: $x = x_0 e^{-0,00043 \cdot 300}$, откуда $\frac{x}{x_0} = e^{-0,129}$, или $\frac{x}{x_0} \approx 0,878$. Это приближенное равенство показывает, что по истечении 300 лет сохранится $\approx 87,8\%$ первоначального запаса радия.

Задача 2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок любой из ее касательных, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

Р е ш е н и е. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой кривой, обладающая требуемым свойством, и AB — отрезок касательной к кривой в данной точке, заключенный между координатными осями (рис. 100). По условию задачи $AM = MB$. Если ON изображает абсциссу точки M, то $ON = NA = x$. Из треугольника NAM имеем: $\operatorname{tg} \widehat{NAM} = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$. Так как $\operatorname{tg} \widehat{NAM} = -\operatorname{tg} \widehat{MAX}$, то $\operatorname{tg} \widehat{MAX} = -\frac{y}{x}$ — в любой точке M искомой кривой $y = f(x)$.

С другой стороны, угловой коэффициент $\operatorname{tg} \widehat{MAX}$ касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M выражается с помощью производной: $\operatorname{tg} \widehat{MAX} = \frac{dy}{dx}$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \qquad (8)$$

Таким образом, задача сводится к определению функции (графиком которой является искомая кривая), удовлетворяющей дифференциальному уравнению первого порядка. В этом уравнении переменные легко разделяются (для $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $\ln |y| = -\ln |x| + \ln |c|$. Для простоты записи окончательного результата мы обозначали здесь произвольную постоянную интегрирования через $\ln |c|$, что допустимо, так как $\ln |c|$ (при $c \neq 0$) может принимать любое значение в интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, общий интеграл уравнения (8) будет:

$$xy = c \ (c \neq 0). \qquad (9)$$

Итак, условиям задачи удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых («семейство» кривых). Это есть семейство равносторонних гипербол, асимптотами которых служат оси координат. Для того чтобы из

этого семейства гипербол выделить одну определенную гиперболу, достаточно задать точку (x_0, y_0), через которую проходит эта гипербола. В самом деле, в этом случае, подставив в соотношение (9) $x = x_0$, $y = y_0$, мы найдем: $x_0y_0 = C$. Следовательно, кривая, удовлетворяющая условиям задачи и проходящая через данную точку (x_0, y_0), имеет вид: $y = \frac{x_0y_0}{x}$.

Замечание 2. При отыскании общего интеграла (3) уравнения (1) предполагалось, что $\psi(y) \neq 0$ для всех значений y из промежутка (c, d). Если при некотором значении $y = y_1$, $c < y_1 < d$ имеем $\psi(y_1) = 0$, то соотношение (2) не имеет смысла. Но в таком случае функция $y = y_1$ также является решением уравнения (1), потому что наряду с $\psi(y_1) = 0$ и $\frac{dy_1}{dx} = 0$, так что, подставляя функцию $y = y_1$ в обе части уравнения (1), мы обратим его в тождество. Так как интеграл $\int \frac{dy}{\psi(y)}$ при $y = y_1$ не определен, то решение $y = y_1$, вообще говоря, не входит в состав общего интеграла (3). Поэтому, интегрируя уравнение (1) разделением переменных, надлежит каждый раз проверять, нет ли среди функций $y = y_1$, определяемых равенством $\psi(y) = 0$, таких, что $y_1 \in (c, d)$, и если такие функции найдутся, то их надо присоединить к найденному ранее (см. (3)) множеству решений уравнений (1).

Пример 3. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = y^2$.

Решение. Разделим переменные, полагая, что $y^2 \neq 0$: $\frac{dy}{y^2} = dx$. Интегрируя, находим: $-\frac{1}{y} = x + C$, откуда $y = -\frac{1}{x + C}$ — общее решение рассматриваемого уравнения.

Решением данного уравнения будет и функция, определяемая равенством $\psi(y) = y^2 = 0$, т. е. функция $y = 0$. Оно нами было потеряно при делении обеих частей уравнения на y^2. Это решение не получается из общего ни при каком значении C.

Пример 4. Решить уравнение

$$e^y(y' + 1) = 1. \tag{10}$$

Решение. Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ и произведя соответствующие преобразования, перепишем (для $y \neq 0$) данное уравнение в виде:

$$\frac{e^y dy}{1 - e^y} = dx. \tag{11}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{e^y dy}{1 - e^y} = \int dx + C_1,$$

или $\ln|1 - e^y| = -x - C_1$, откуда $1 - e^y = \pm e^{-C_1}e^{-x}$, т. е. $1 - e^y = \pm C_2e^{-x}$ (где $C_2 = e^{-C_1} > 0$). Следовательно, $y = \ln(1 \pm C_2e^{-x})$ — общее решение уравнения (11).

Заметим, что, когда C_2 пробегает все действительные положительные значения, выражение $\pm C_2$ пробегает все множество действительных чисел, отличных от нуля. Поэтому окончательно общее решение данного уравнения можно записать в следующем виде:

$$y = \ln (1 + C_3 e^{-x})^*), \tag{12}$$

где C_3 — любое действительное число, отличное от нуля.

В силу того, что $\psi (y) = 1 - e^y$ обращается в нуль при $y = 0$, имеем еще одно решение уравнения (10): $y = 0$, не получаемое из (12). Однако, если условиться приписывать в (12) параметру C_3 и значение, равное нулю, при котором $y = \ln 1 = 0$, то (12) будет общим решением и для уравнения (10).

К уравнениям с разделяющимися переменными легко приводится следующее уравнение, заданное в симметричной относительно x и y дифференциальной форме:

$$P (x) Q (y) dx + R (x) S (y) dy = 0, \tag{13}$$

где $P (x)$, $Q (y)$, $R (x)$ и $S (y)$ — непрерывные функции в области, определяемой неравенствами: $a < x < b$, $c < y < d$.

Предполагая, что $Q (y) R (x) \neq 0$, разделим обе части уравнения (13) на произведение $Q (y) R (x)$:

$$\frac{P (x) dx}{R (x)} + \frac{S (y) dy}{Q (y)} = 0. \tag{14}$$

Далее, не обязательно переносить одно из слагаемых в правую часть: коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент при dy — только от y, так что переменные в уравнении (14) разделены, и общий интеграл уравнения (14), а стало быть, и уравнения (13) будет:

$$\int \frac{P (x) dx}{R (x)} + \int \frac{S (y) dy}{Q (y)} = C, \tag{15}$$

где C — произвольная постоянная.

Замечание 3. При переходе от уравнения (13) к уравнению (14) мы предполагали, что $Q (y) R (x) \neq 0$. Если в уравнении (13) y считать искомой функцией, а x — аргументом и если $y = y_1 (c < y_1 < d)$ является корнем уравнения $Q (y) = 0$, то функция $y = y_1$ является решением уравнения (13), не содержащимся в (15). Если в уравнении (13) x — искомая функция, а y — аргумент и $R (x_1) = 0$, $a < x_1 < b$, то $x = x_1$ — решение уравнения (13), не получаемое из (15).

Так как уравнение (13) является частным случаем уравнения (5) § 81, то мы в нем можем x и y считать равноправными, не предрешая заранее, какое из них считать за независимое переменное, а какое за функцию (что часто особенно выгодно в геометрических вопросах), и потому, решая уравнение (13) при таком условии, мы

*) В дальнейшем в аналогичных случаях переход от формы общего решения, содержащей абсолютные величины, к форме вида (12), где C_2 может быть уже как положительным, так и отрицательным числом, мы проводить, краткости ради, не будем, а сразу будем записывать решение в форме без абсолютных величин.

должны в случае, когда $Q(y_1) = 0$ $(c < y_1 < d)$ или $R(x_1) = 0$ $(a < x_1 < b)$, считать функции $y = y_1$ и $x = x_1$ решениями этого уравнения. (Соответствующие им интегральные кривые есть прямые, перпендикулярные осям координат.) Поэтому, найдя общий интеграл уравнения (13), необходимо проверить, не потеряны ли решения $y = y_1$ и $x = x_1$ в связи с предположением, что $Q(y)R(x) \neq 0$.

Пример 5. Решить уравнение $(x^2 + 1)\,dy + 2x\,(y - 1)\,dx = 0$.

Р е ш е н и е. Разделяем переменные. Для чего делим обе части уравнения на $(x^2 + 1)\,(y - 1)$, получаем:

$$\frac{dy}{y-1} + \frac{2x\,dx}{x^2+1} = 0.$$

Интегрируем каждое из слагаемых и сумму первообразных приравниваем постоянной (которую обозначим через $\ln|c|$): $\ln|y - 1| + \ln(x^2 + 1) = \ln|c|$, откуда

$$|y - 1|\,(x^2 + 1) = C \qquad (16)$$

общий (при $y \neq 1$) интеграл данного уравнения.

Так как $y = 1$ является корнем уравнения $Q(y) = y - 1 = 0$, то решением рассматриваемого уравнения будет также функция $y = 1$, которая не получается из соотношения (16), так как в нем $C \neq 0$. Но если разрешить в соотношении (16) брать $C = 0$, то и это решение может быть получено из (16). Таким образом, соотношение (16), где C — любое действительное число, является общим интегралом рассматриваемого дифференциального уравнения.

Рассмотрим простейшие дифференциальные уравнения, которые путем замены переменных приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Одним из таких уравнений является уравнение вида: $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$,

где a, b и c — постоянные величины, а f — некоторая непрерывная функция. Правая часть данного уравнения зависит только от линейного выражения $ax + by + c$. Произведем замену неизвестной функции y новой функцией z, связанной с y соотношением $z = ax + by + c$. Тогда $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b}$ $(b \neq 0)$*).

Подставляя в данное уравнение z вместо $ax + by + c$, а $\frac{\frac{dz}{dx} - a}{b}$ — вместо $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение, в котором неизвестной функцией является z: $\frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} = f(z)$, или $\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$.

В этом уравнении переменные легко разделяются: $\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$.

*) В случае $b = 0$ сразу получаем уравнение с разделяющимися переменными.

Интегрируя, получим общий интеграл этого уравнения:

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = x + C.$$

Заменяя здесь z выражением $ax + by + c$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $y' = \dfrac{1}{2y - 3x}$.

Р е ш е н и е. Это уравнение рассмотренного вида $\left(y \neq \dfrac{3}{2}x\right)$. Полагая $z = 2y - 3x (z \neq 0)$, будем иметь: $z' = 2y' - 3$, $y' = \dfrac{z' + 3}{2} = \dfrac{1}{2}z' + \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{2}z' + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2 - 3z}{z}$. Разделяя переменные $\left(\text{при } z \neq \dfrac{2}{3}\right)$, находим: $dx = \dfrac{z\,dz}{2 - 3z}$. Интегрируя, получаем:

$$x = \int \frac{z\,dz}{2 - 3z} + C,$$

откуда, вычисляя интеграл, будем иметь: $x = C - \dfrac{1}{3}z - \dfrac{2}{9}\ln|2 - 3z|$. Возвращаясь к переменной y, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$x = C - \frac{1}{3}(2y - 3x) - \frac{2}{9}\ln|9x - 6y + 2|, \text{ или } 3y + \ln|9x - 6y + 2| = C_1.$$

Случаю $z = \dfrac{2}{3}$ соответствует еще интеграл $x = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{9}$ этого уравнения.

Пример 7. Решить уравнение $y' = \cos(y - x)$.

Р е ш е н и е. Полагая $y - x = u$, найдем: $dy = du + dx$. Заменяя в данном уравнении разность $y - x$ и dy их выражениями, получим уравнение $du + dx = \cos u\,dx$, или $(1 - \cos u)\,dx + du = 0$. В последнем уравнении переменные легко разделяются: $dx + \dfrac{du}{1 - \cos u} = 0$. Тогда

$$x + \int \frac{du}{1 - \cos u} = C, \text{ откуда } x - \operatorname{ctg} u - \frac{1}{\sin u} = C.$$

Подставляя вместо u его значение, получим общий интеграл данного уравнения:

$$x - \operatorname{ctg}(y - x) - \frac{1}{\sin(y - x)} = C.$$

Кроме того, решением рассматриваемого уравнения служат функции $y = x + 2k\pi$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, которые мы находим, решая уравнение $1 - \cos(y - x) = 0$.

Более сложным уравнением, приводящимся к уравнению с разделяющимися переменными путем замены переменных, является уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \tag{17}$$

где f — некоторая непрерывная функция, а a, b, c, a_1, b_1, c_1 — постоянные числа, причем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Если здесь $a = b = a_1 = b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$, то правая часть в (17) будет постоянным числом, и мы будем иметь простейший случай уравнения с разделяющимися переменными, уже рассмотренного выше. Поэтому будем считать, что хоть одно из этих чисел отлично от нуля, например $b \neq 0$. Тогда из условия (18) следует, что $a_1 = \frac{b_1}{b} a$. Обозначая $\frac{b_1}{b}$ через k, найдем, что $a_1 = ak$, а также $b_1 = bk$ (если и $a \neq 0$, то это означает, что имеет место соотношение: $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$ — коэффициенты при x и y в выражениях $ax + by + c$ и $a_1x + b_1y + c_1$ пропорциональны). При этом представляет интерес только тот случай, когда $c_1 \neq ck$. Тогда уравнение (17) может быть переписано в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1}\right]. \tag{19}$$

Полагая

$$ax + by = z, \tag{20}$$

найдем $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right). \tag{21}$$

Внося в (19) выражения для $ax + by$ и $\frac{dy}{dx}$ из (20) и (21), получим:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f\left(\frac{z + c}{kz + c_1}\right).$$

Разрешая это уравнение относительно $\frac{dz}{dx}$, найдем:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{z + c}{kz + c_1}\right)$$

— дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общий интеграл и заменив в нем z на $ax + by$, получим общий интеграл уравнения (17).

Частным случаем уравнения (17), очевидно, является (при $dx \neq 0$) уравнение

$$(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)\,dy = 0, \tag{22}$$

где $ab_1 - a_1b$, т. е. $a = a_1k$, $b = b_1k$ (или $a_1 = ak$; $b_1 = bk$), причем, кроме того, $c \neq c_1k$ (соответственно $c_1 \neq ck$); при таких ограничениях равенство $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ не может определить решения для уравнения (22) при $dx \neq 0$, значит, мы можем считать, что $a_1x + b_1y + c_1 \neq 0$ и, следовательно, можем*) уравнение (22) свести к уравнению вида (17) (с $f(u) = u$).

*) Если здесь $k = 0$, то, разумеется, считаем, что по условию $c_1 \neq 0$.

Если $a = a_1k$, $b = b_1k$, $c = c_1k$, то уравнение (22) тождественно удовлетворяется при $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, а также имеет общее решение вида $y = -kx + c$.

Пример 8. Решить уравнение $(4x + 2y + 5)\,dx + (2x + y + 2)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Здесь коэффициенты при x и y в выражениях при dx и dy между собой пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам. Поэтому данное уравнение есть уравнение вида (22) и по доказанному его можно решать с помощью замены $2x + y = z$. Отсюда получим: $2dx + dy = dz$, $dy = dz - 2dx$. Подставляя значения $2x + y = z$ и dy в данное уравнение, найдем:

$$(2z + 5)dx + (z + 2)(dz - 2dx) = 0,\quad dx + (z + 2)\,dz = 0.$$

В полученном уравнении переменные уже разделены. Выполняя квадратуры, найдем: $x + \frac{z^2}{2} + 2z = C_1$, откуда $2x + z^2 + 4z = C$ $(C = 2C_1)$. Заменив в этом равенстве z на $2x + y$, получим общий интеграл исходного уравнения: $2x + (2x + y)^2 + 4(2x + y) = C$.

Пример 9. Решить уравнение $(x^2y^2 + 1)\,dx + 2x^2dy = 0$.

Р е ш е н и е. Подстановка $xy = t$ приводит (для $x \neq 0$) к уравнению

$$\frac{dx}{2x} + \frac{dt}{(t-1)^2} = 0 \text{ (для } t \neq 1).$$

Интегрируя, находим: $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{1-t} = C$. Возвращаясь к старой переменной, получим общий интеграл данного уравнения в виде:

$$\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{2}\ln|x| = C.$$

Кроме этого, решением рассматриваемого уравнения является функция $y = \frac{1}{x}$ (случай $t = 1$) и, очевидно (в смысле с. 369), функция $x = 0$.

§ 86. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В предыдущем параграфе рассматривались некоторые дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. К числу таких дифференциальных уравнений относятся и так называемые однородные дифференциальные уравнения. Определение однородного дифференциального уравнения опирается на понятие однородной функции. Напомним это понятие.

Многочлен от любого числа переменных называется, как известно, *однородным*, если во всех его членах сумма показателей при переменных равна одному и тому же числу. Например, многочлен $ax^2 + bxy + cy^2$ при любых коэффициентах a, b и c является однородным: сумма показателей при переменных x и y во всех его членах равна двум. Если в этом многочлене умножить x и y на некоторое число t, то и весь многочлен приобретет множитель t во второй степени: $a(xt)^2 + b(xt)(yt) + c(yt)^2 = t^2(ax^2 + bxy + cy^2)$. Это свойство, присущее всем однородным многочленам, может слу-

жить основанием для введения понятия однородной функции. Для упрощения письма мы ограничимся случаем функции от двух переменных.

Определение. *Функция $f(x, y)$ аргументов x и y, определенная в области D, называется однородной функцией в этой области, если в каждой точке (x, y) области D и для любого числа t, для которого точка (xt, yt) принадлежит области D, выполняется равенство: $f(xt, yt) = t^{\alpha} f(x, y)$, где α — некоторое действительное число.*

Короче, функция $f(x, y)$ называется однородной, если при умножении значений всех ее аргументов на любое число t значение функции умножается на некоторую степень t^{α} (всегда одну и ту же для f) числа t. Число α при этом называется показателем (или измерением) однородности функции. В отличие от случая многочленов здесь показатель α может быть любым действительным числом.

Например, функции $f(x, y) = \sqrt{xy} + y - \frac{x^2}{y}$, $\varphi(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$, $\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$, $F(x, y) = x^{\pi} + y^{\pi}$ однородные, показатели однородности которых соответственно равны: 1, 0, $-\frac{1}{2}$, π, так как

$$f(xt, yt) = \sqrt{xt\,yt} + yt - \frac{(xt)^2}{yt} = t\left(\sqrt{xy} + y - \frac{x^2}{y}\right) = tf(x, y),$$

$$\varphi(xt, yt) = t^{\frac{xt}{yt}} = t^0 \varphi(x, y), \quad \psi(xt, yt) = \frac{1}{\sqrt{xt + yt}} = t^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x+y}} =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} \psi(x, y), \quad F(xt, yt) = (xt)^{\pi} + (yt)^{\pi} = t^{\pi}(x^{\pi} + y^{\pi}) = t^{\pi} F(x, y).$$

Определение. *Дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

называется однородным, если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y, т. е. если

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Полагая здесь $t = \frac{1}{x}$, имеем $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Очевидно, $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ есть некоторая функция от отношения аргументов $\frac{y}{x}$. Обозначая ее через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, мы можем (для $x \neq 0$) уравнение (1) записать в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)^{*)}. \tag{2}$$

*) Чтобы уравнения (1) и (2) были эквивалентны, будем рассматривать и уравнение (1) только для значений $x \neq 0$.

Следовательно, если дифференциальное уравнение (1) есть однородное, то правую часть этого уравнения можно всегда представить в виде функции отношения аргументов.

Обратно, если правая часть данного дифференциального уравнения есть функция отношения аргументов, то это уравнение однородное. Действительно, всякая функция $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет тождеству $\varphi\left(\frac{ty}{tx}\right) = t^{\circ}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. функция $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ однородная, нулевого измерения.

Интегрирование уравнений вида (2) сводится с помощью специальной подстановки к интегрированию уравнений с разделяющимися переменными. Заменим неизвестную функцию y новой функцией z с помощью соотношения: $z = \frac{y}{x}$. Имеем: $y = zx$, $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Подставив в уравнение (2) z вместо $\frac{y}{x}$ и $z + x\frac{dz}{dx}$ вместо $\frac{dy}{dx}$, получим $z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z)$, или

$$xdz = [\varphi(z) - z]\,dx \qquad (2')$$

— дифференциальное уравнение относительно новой неизвестной функции z.

Предполагая, что $\varphi(z) - z \neq 0$ (и учитывая, что $x \neq 0$), разделим в этом уравнении переменные:

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}. \qquad (3)$$

Пусть функция $\varphi(z)$ непрерывна в интервале $a < z < b$. Тогда общий интеграл уравнения (3), выраженный в квадратурах, будет:

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C,$$

где C — произвольная постоянная. Обозначим какую-нибудь первообразную от $\frac{1}{\varphi(z) - z}$ через $F(z)$; тогда общий интеграл дифференциального уравнения (2′) примет вид: $F(z) = \ln|x| + C$.

Заменяя в этом соотношении вспомогательную функцию z ее значением $\frac{y}{x}$, получим (с условием $\varphi(z) \neq z$) общий интеграл уравнения (1) в области $\left\{a < \frac{y}{x} < b,\ x \neq 0\right\}$ в виде:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C. \qquad (4)$$

Замечание 1. В том случае, когда $\varphi(z) - z = 0$ на интервале $a < z < b$ или $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \frac{y}{x}$ на интервале $a < \frac{y}{x} < b$, дифференциальное уравнение (2) принимает вид $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ и, та-

ким образом, является уравнением с разделяющимися переменными; его общее решение будет $y = Cx$ $(x \neq 0)$.

Если же $\varphi(z) - z \not\equiv 0$ на интервале $a < z < b$, но существует значение $z = z_1$, $a < z_1 < b$, такое, что $\varphi(z_1) - z_1 = 0$, то $z = z_1$ — решение уравнения (2'), а следовательно, $y = z_1 x$ — решение уравнения (2'), вообще говоря, не содержащееся в (4).

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 6$.

Р е ш е н и е. Правая часть рассматриваемого уравнения представляет функцию нулевого измерения; следовательно, имеем однородное уравнение. Делаем замену: $z = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = zx$, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$, и данное уравнение принимает вид:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z^2 - 6, \text{ или } xdz = [(z^2 - 6) - z]\,dx.$$

Разделяя переменные, будем иметь: $\dfrac{dz}{z^2 - z - 6} = \dfrac{dx}{x}$.

Разлагая дробь $\dfrac{1}{z^2 - z - 6}$ на элементарные дроби и интегрируя обе части последнего уравнения, находим:

$$\frac{1}{5}\ln|z - 3| - \frac{1}{5}\ln|z + 2| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0),$$

или

$$\ln\left|\frac{z - 3}{z + 2}\right|^{\frac{1}{5}} = \ln|C_1 x|,$$

откуда $\left(\dfrac{z - 3}{z + 2}\right)^{\frac{1}{5}} = C_1|x|$, где C_1 — произвольная постоянная $(C_1 \neq 0)$. Решая это уравнение относительно z, получим: $z = \dfrac{2C|x|^5 + 3}{1 - C|x|^5}$, где $C = C_1^5$.

Подставляя вместо z отношение $\dfrac{y}{x}$, получим решение данного уравнения в виде:

$$y = x\,\frac{2C|x|^5 + 3}{1 - C|x|^5}. \tag{5}$$

Деление на $\varphi(z) - z = z^2 - z - 6$ возможно, если $z^2 - 6 \not\equiv z$. Равенство же $z^2 - z - 6 = 0$ определяет два значения z: 3 и -2, которым соответствуют две функции: $y = 3x$ и $y = -2x$. Функция $y = -2x$, как легко убедиться с помощью подстановки, является решением данного уравнения, причем оно не может быть получено из решения (5) ни при каком значении C; функция же $y = 3x$ также является решением рассматриваемого уравнения, но может быть получено из (5) при $C = 0$. Таким образом, общее решение исходного уравнения (в области $y \neq -2x$) определяется равенством (5), где C — любое действительное число.

К однородным дифференциальным уравнениям обычно относят также и всякое уравнение вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (6)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одного и того же измерения m относительно переменных x и y. Такое уравнение может быть легко приведено к уравнению вида (2). Действительно, функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удовлетворяют условиям: $M(tx, ty) = t^m M(x,y)$, $N(tx, ty) = t^m N(x, y)$, где t — произвольный множитель. Положим $t = \frac{1}{x}$, тогда $M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m M(x, y)$, $N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m N(x, y)$, откуда, считая $N(x, y) \neq 0$*), находим:

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = \frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}.$$

Следовательно, уравнение (6) можно записать в виде:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

А это и есть однородное дифференциальное уравнение.

Замечание 2. При интегрировании однородного уравнения вида (6) не обязательно предварительно приводить его к виду (2). Можно сразу делать подстановку: $y = zx$.

Пример 2. Решить уравнение $(x^2 + 3xy + 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0$.

Решение. Данное уравнение — однородное, так как коэффициенты при dx и dy, т. е. $M(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2$ и $N(x, y) = -(x^2 + 2xy)$ — однородные функции одного и того же измерения ($m = 2$). Вводим новую функцию z, полагая $y = zx$. Тогда $dy = zdx + xdz$ и рассматриваемое уравнение после подстановки, приведения подобных членов и сокращения на x^2 принимает вид:

$$(1 + 2z + z^2)dx - x(1 + 2z)\,dz = 0. \qquad (7)$$

Разделяем в нем переменные (при $z \neq -1$):

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 + 2z)\,dz}{1 + 2z + z^2}$$

и интегрируем:

$$\ln|x| = \int \frac{(1 + 2z)\,dz}{1 + 2z + z^2} + C_1, \quad \ln|x| = 2\ln|1 + z| + \frac{1}{1 + z} + C_1,$$

$$\frac{(1 + z)^2}{|x|} = C_2 e^{-\frac{1}{1+z}}.$$

---

*) Если в некоторых точках (x, y) функция $N(x, y)$ обращается в нуль, то, считая, что для этих точек функция $M(x, y) \neq 0$, мы приведем рассматриваемое уравнение к виду $\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} = \varphi_1\left(\frac{x}{y}\right)$, т. е. снова к однородному уравнению.

Учитывая, что $z = \frac{y}{x}$, получаем (для $y \neq -x$) общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{(x+y)^2}{x^3} = C_2 e^{-\frac{x}{x+y}}.$$

Кроме этого, имеем решение данного уравнения $y = -x$, которое потеряно при делении уравнения (7) на $(1+z)^2$, или, что то же самое, на $\left(1+\frac{y}{x}\right)^2$, а также решение $x = 0$.

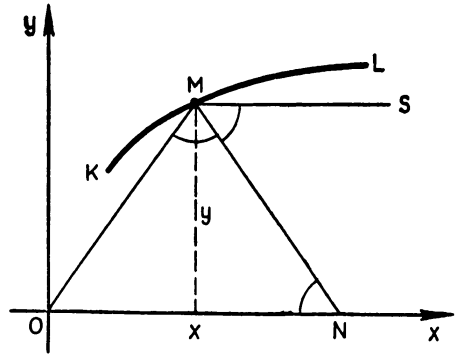


Рис. 101

Замечание 3. Некоторые однородные дифференциальные уравнения проще решаются с помощью подстановки $x = zy$, которая, как легко убедиться, также приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача. Определить, какую форму должно иметь зеркало, чтобы все отражающиеся от него лучи, выходящие из точечного источника, были после отражения параллельны заданному направлению.

Решение. Пересечем поверхность зеркала плоскостью, проходящей через точечный источник параллельно заданному направлению. Источник света примем за начало прямоугольной системы координат (расположенной в этой плоскости), а заданное направление, которому должны быть параллельны отраженные лучи, примем за ось Ox (рис. 101). Пусть KL — линия пересечения поверхности зеркала с плоскостью xOy («зеркальная» кривая). Будем искать плоскую зеркальную кривую, отражающую параллельно данному направлению все лучи, исходящие из данной точки.

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на кривой KL. Тогда OM—один из лучей, падающих на зеркало, а MS—отраженный луч, идущий по направлению оси Ox. Проведем нормаль к кривой KL в точке M до пересечения с осью Ox в точке N. Согласно известному закону физики, лучи падающий, отраженный и нормаль к поверхности, на которую падает луч, лежат в одной плоскости, причем первые два составляют с нормалью равные углы. Поэтому $\angle OMN = \angle NMS$. Далее, по построению $\angle ONM = \angle NMS$. Отсюда $\angle OMN = \angle ONM$. Следовательно, в треугольнике OMN, $|ON| = |OM|$.

Пусть уравнение искомой кривой есть $y = f(x)$. Тогда уравнение нормали к этой кривой в точке $M(x, y)$ будет:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Полагая здесь $Y = 0$, получим: $-y = -\frac{1}{y'}(X - x)$, отсюда находим:

$$X = ON = x + yy'.$$

Длина отрезка OM будет: $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя в равенство $ON = OM$ выражения для ON и OM, получаем:

$$x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2} \quad -$$

дифференциальное уравнение первого порядка. Оно не изменяется от замены x на kx, а y — на ky и потому является однородным. Учитывая, что по смыслу задачи $y \neq 0$, приведем это уравнение к виду:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}, \text{ или } y\,dx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy. \qquad (8)$$

Введем переменное t, положив на этот раз $x = ty$. После подстановки и сокращения на y, получим:

$$y\,dt = \sqrt{1+t^2}\,dy.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+\ln|C|=\ln|y|,$$

или $y = C(t+\sqrt{1+t^2})$ $(C \neq 0)$. Заменяя здесь t на $\frac{x}{y}$, получим:

$$y^2 = C\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) —$$

общий интеграл уравнения (8).

Освобождаясь от радикала, получим эквивалентное предыдущему выражение для общего интеграла в виде:

$$y^2 = 2C\left(x+\frac{C}{2}\right), \quad \text{или} \quad x = \frac{y^2-C^2}{2C}.$$

Очевидно, это есть семейство софокусных парабол (фокус — в начале координат) с вершинами в точках вида $\left(-\frac{C}{2}, 0\right)$. Любая кривая этого семейства получается при вращении параболы KL около ее оси Ox, и потому искомая поверхность зеркала имеет форму параболоида с уравнением: $x = \frac{y^2+z^2-C^2}{2C}$

Такие параболические зеркала, преобразующие расходящийся пучок лучей в параллельный, употребляются, например, для прожекторов. Прожектор с параболическим зеркалом является наилучшим средством для получения цилиндрического светового пучка.

К однородному дифференциальному уравнению легко преобразуется уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{9}$$

где f — некоторая непрерывная функция, а a, b, c, a_1, b_1, c_1 — некоторые постоянные.

Если $c = c_1 = 0$, то уравнение (9) уже является однородным, ибо в этом случае

$$f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}\right) —$$

функция отношения аргументов.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел c и c_1 не равно нулю и пусть определитель, составленный из коэффициентов при x и y, не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

(случай $\Delta = 0$ рассмотрен в § 85). Введем тогда новые переменные ξ и η, связанные с x и y соотношениями: $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, где α и β — некоторые, пока произвольные постоянные. Тогда $dx = d\xi$, $dy = d\eta$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$. Подставляя в уравнение (9) выражения для x, y и $\frac{dy}{dx}$, будем иметь:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right). \tag{10}$$

Подберем теперь α и β так, чтобы они давали решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Так как по условию определитель этой системы отличен от нуля, то α и β из нее могут быть определены требуемым образом. При таком подборе α и β дифференциальное уравнение (10) становится однородным:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Найдя общий интеграл уравнения $\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$ и заменив в нем переменные ξ и η соответственно через $x - \alpha$ и $y - \beta$, где α и β являются решениями системы (11), мы получим общий интеграл уравнения (9).

Частным случаем уравнения (9) является уравнение

$$(ax + by + c)\,dx + (a_1x + b_1y + c_1)\,dy = 0,$$

где $ab_1 - a_1b \neq 0$.

Пример 3. Решить уравнение $(2x - 4y + 2)\,dx + (5x - y - 4)\,dy = 0$.
Р е ш е н и е. Так как здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то данное уравнение путем замены переменных может быть приведено к однородному. С этой целью составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 2 = 0, \\ 5\alpha - \beta - 4 = 0, \end{cases}$$

коэффициентами уравнений которой являются соответственно коэффициенты выражений при dx и dy. Решая эту систему, находим: $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Поэтому положим $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$, откуда $dx = d\xi$, $dy = d\eta$. Производя соответствующую замену в данном уравнении, получим:

$$2(\xi - 2\eta)d\xi + (5\xi - \eta)\,d\eta = 0; \tag{12}$$

это уже однородное уравнение. Полагая теперь $\eta = z\xi$, находим: $d\eta = \xi dz + z d\xi$. Подставляя значения η и $d\eta$ в уравнение (12), получим:

$2(\xi - 2\xi z)\,d\xi + (5\xi - \xi z)(\xi dz + z d\xi)$, или $(2 + z - z^2)\,d\xi + (5 - z)\,\xi dz = 0$,

а после разделения переменных ($z \neq 2$, $z \neq -1$):

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(5 - z)\,dz}{2 + z - z^2} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\ln|\xi| + \int \frac{(5 - z)\,dz}{2 + z - z^2} = \ln|C_1|, \quad \ln|\xi| - \ln|2 - z| + \ln|z + 1|^2 = \ln|C|,$$

$$\ln \frac{|\xi|(z + 1)^2}{|2 - z|} = \ln|C|, \quad \frac{\xi(z + 1)^2}{2 - z} = C.$$

Но $z = \frac{\eta}{\xi}$. Поэтому $\frac{(\eta + \xi)^2}{2\xi - \eta} = C$.

Наконец, заменяя в последнем равенстве ξ и η соответственно на $x - 1$ и $y - 1$, получим (для $y \neq 2x - 1$ и $y \neq -x + 2$) общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{(y + x - 2)^2}{2x - y - 1} = C. \tag{13}$$

Кроме того, решениями данного уравнения, соответствующими случаям $z = 2$, $z = -1$, будут: функция $y = 2x - 1$, не содержащаяся в (13), и функция $y = -x + 2$, которая хотя и соответствует нулевому значению постоянного C в выражении (13), но не получается при проведенной квадратуре.

§ 87. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$, *в котором* F *— линейная функция относительно* y *и* $y' = \frac{dy}{dx}$, *называется линейным дифференциальным уравнением.* Общий вид его следующий:

$$f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)\,y + \psi(x) = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные в некотором интервале (a, b) функции. Это уравнение легко приводится к виду: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Предполагая, что в интервале (a, b) коэффициент $f(x)$ не обращается в нуль, разделим все члены уравнения (1) на $f(x)$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dy}{dx} + py = q, \tag{2}$$

или $\frac{dy}{dx} = q - py$, где $p = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, $q = -\frac{\psi(x)}{f(x)}$ — известные функции в рассматриваемом интервале. Вид (2) линейного уравнения мы будем называть в дальнейшем *нормальным.*

Если в уравнении (2) коэффициент $q \not\equiv 0$, то это уравнение называется линейным *неоднородным* уравнением (или уравнением с правой частью). Если же $q \equiv 0$, то уравнение (2) называется линейным *однородным* уравнением (или уравнением без правой части).

Предполагая, что функции $p = p(x)$ и $q = q(x)$ непрерывны в интервале (a, b), покажем, что уравнение (2) интегрируется в квадратурах на этом интервале.

Рассмотрим сначала уравнение, которое получается из уравнения (2) заменой в нем функции $q(x)$ нулем, т. е. уравнение

$$\frac{d\bar{y}}{dx} + p\bar{y} = 0. \tag{3}$$

Такое линейное однородное уравнение называется уравнением, соответствующим данному неоднородному. В этом уравнении переменные легко разделяются (при $\bar{y} \neq 0$):

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = -p\,dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln|\bar{y}| = -\int p\,dx + C_1,\ |\bar{y}| = e^{-\int p\,dx + C_1} = e^{C_1} e^{-\int p\,dx},\ \bar{y} = \pm e^{C_1} e^{-\int p dx}$$

и обозначая $\pm e^{C_1}$ через C ($C \neq 0$), получим:

$$\bar{y} = Ce^{-\int p\,dx}. \tag{4}$$

Разделяя переменные, мы потеряли решение $\bar{y} = 0$. Условившись произвольной постоянной в (4) приписывать и значение, равное нулю, получаем окончательно общее решение уравнения (3):

$$\bar{y} = Ce^{-\int p\,dx} \quad (-\infty < C < +\infty). \tag{4'}$$

Для отыскания общего решения линейного неоднородного уравнения (2) мы применим так называемый *метод вариации произвольной постоянной* (метод Лагранжа).

Очевидно, если $q(x) \not\equiv 0$, то функция (4') ни при каком значении постоянного C не будет решением уравнения (2). Поставим такой вопрос: нельзя ли в общем решении (4') линейного однородного уравнения заменить C некоторой функцией от x так, чтобы выражение $C(x)e^{-\int p dx}$ стало решением уравнения (2) (и тем самым, очевидно, перестало быть решением уравнения (3)). Итак, будем в равенстве (4') считать C не постоянным числом, а некоторой функцией $C = C(x)$*), обладающей непрерывной производной, и постараемся определить ее так, чтобы функция

$$y = C(x)\,e^{-\int p\,dx} \tag{5}$$

удовлетворяла уравнению (2).

*) Таким образом, постоянная величина заменяется переменной, т. е. варьируется; этим и объясняется название метода.

Дифференцируя функцию (5) и считая при этом C функцией от x, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p\,dx} - C(x)\,p(x)\,e^{-\int p\,dx}.$$

Функция $C(x)$ должна быть такова, чтобы при подстановке y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (2) она обращала последнее в тождество, т. е. должно быть:

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p\,dx} - C(x)\,pe^{-\int p\,dx} + pC(x)\,e^{-\int p\,dx} \equiv q(x),$$

или $\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p\,dx} = q(x)$, откуда

$$dC(x) = q(x)\,e^{\int p\,dx}\,dx,$$

и, следовательно,

$$C(x) = \int q(x)\,e^{\int p\,dx}\,dx + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Непосредственно проверяется, что при так подобранном $C(x)$ функция (5) удовлетворяет уравнению (2). Значит, такая функция $C(x)$, что $C(x)e^{-\int p\,dx}$ является общим решением уравнения (2), существует.

Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в (5), получим общее решение линейного неоднородного уравнения (2) в виде:

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[C + \int q(x)\,e^{\int p\,dx}\,dx\right], \tag{6}$$

(где в окончательной записи индекс у C_1 отброшен).

Замечание. Нет необходимости запоминать формулу (6). Целесообразнее помнить лишь сам приведенный способ решения уравнения (2) и применять его в каждом конкретном случае заново.

Пример 1. Решить уравнение $x\frac{dy}{dx} + y = x^2$.

Решение. Это уравнение линейное, неоднородное. Приведем его к нормальному виду:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\,y = x. \tag{7}$$

Линейное однородное уравнение, соответствующее уравнению (7), будет:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\,y = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим: $\ln|y| + \ln|x| = \ln|C|$ ($C \neq 0$), откуда $xy = C$, $y = \frac{C}{x}$.

Будем теперь считать C неизвестной функцией x и определим ее так, чтобы функция $y = \frac{C}{x}$ удовлетворяла (7), т. е. будем искать общее решение уравнения (7) в виде функции:

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Дифференцируя эту функцию, имеем: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dC}{dx} - \frac{C}{x^2}$. Значения y и $\frac{dy}{dx}$ подставим в уравнение (7) и потребуем, чтобы оно при этом удовлетворялось:

$$\frac{1}{x}\frac{dC}{dx} - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = x,$$

откуда $\frac{dC(x)}{dx} = x^2$, $C(x) = \frac{x^3}{3} + C_1$, где C_1— произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения будет:

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $(1 + y^2)\,dx - (xy + y + y^3)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение является линейным относительно x и $\frac{dx}{dy}$. Преобразуем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y}{1+y^2}x = y. \tag{8}$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y}{1+y^2}x = 0, \quad \frac{dx}{x} - \frac{y}{1+y^2}dy = 0, \quad \ln|x| = \ln(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + \ln|C|$$

$$(C \neq 0),\ x = C\sqrt{1+y^2}.$$

Считаем C функцией y; тогда:

$$x = C(y)\sqrt{1+y^2};\ \frac{dx}{dy} = \sqrt{1+y^2}\,\frac{dC}{dy} + \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Подставляя значения x и $\frac{dx}{dy}$ в уравнение (8), найдем: $\sqrt{1+y^2}\,\frac{dC}{dy} = y$,

$dC = \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}$, $C(y) = \sqrt{1+y^2} + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$x = 1 + y^2 + C_1\sqrt{1+y^2}$$

— общее решение уравнения (8).

Богатый материал, иллюстрирующий применение теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дают задачи электротехники.

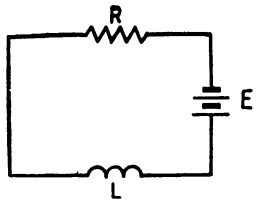


Рис. 102

Задача. В электрической цепи (рис. 102), имеющей сопротивление R и индуктивность L, сила тока возбуждается электродвижущей силой E. Найти зависимость силы тока I (при установившемся режиме) от времени t, зная, что в момент времени $t = 0$ она равна нулю.

Р е ш е н и е. Как известно из физики, потеря напряжения на сопротивлении в момент времени t равна $RI(t)$, а потеря напряжения на индуктивности в этот момент равна $L\dfrac{dI}{dt}$. По закону Кирхгофа в каждый момент времени t сумма потерь напряжений на всех участках цепи равна действующей активной электродвижущей силе. Следовательно, функция $I(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = E, \tag{9}$$

(где R и L постоянные) и начальному условию $I(0) = 0$. Запишем уравнение (9) в виде

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Найдем решение этого уравнения при начальном условии $I_{t=0} = 0$, в предположении, что E — постоянная величина. (Это означает, что мы включаем в цепь, в которой не было тока, постоянную электродвижущую силу.) Применяя формулу (6), получим:

$$I = e^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(C + \int\frac{E}{L}e^{\int\frac{R}{L}dt}dt\right) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(C + \frac{E}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right),$$

или

$$I = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Определим C из начального условия $I(0) = 0$: $\dfrac{E}{R} + C = 0$, $C = -\dfrac{E}{R}$.

Искомое частное решение будет: $I = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Заметим, что при $t = 0$ сила тока I равна нулю, а затем при неограниченном возрастании $t\left(\text{поскольку } \dfrac{R}{L} > 0\right)$ сила тока стремится к постоянному значению $\dfrac{E}{R}$, т. е. к тому значению, которое она должна была бы иметь по закону Ома: $I = \dfrac{E}{R}$.

К линейному уравнению легко приводится путем замены переменной дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + py = qy^m, \tag{10}$$

где p и q — заданные непрерывные в интервале (a, b) функции от x, а m — некоторое постоянное число. Это так называемое *уравнение Бернулли.*

При $m = 0$ уравнение (10) превращается в линейное неоднородное уравнение, при $m = 1$ — в линейное однородное уравнение $\frac{dy}{dx} + (p - q)y = 0$. Интегрирование этих уравнений рассмотрено выше. Будем предполагать поэтому, что число m теперь отлично от нуля и единицы. Предполагая, далее, что $y \neq 0$, разделим обе части уравнения (10) на y^m; получим:

$$y^{-m}\frac{dy}{dx} + py^{1-m} = q. \tag{11}$$

Введем вместо y новую неизвестную функцию z, полагая $z = y^{1-m}$; тогда $\frac{dz}{dx} = (1 - m)\, y^{-m}\frac{dy}{dx}$, откуда $y^{-m}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx}$ и, следовательно, уравнение (11) примет вид:

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} + pz = q,$$

или

$$\frac{dz}{dx} + (1 - m)\, pz = (1 - m)\, q.$$

Это есть линейное неоднородное уравнение, общее решение которого найдется по формуле (6):

$$z = e^{-\int (1-m)p\, dx}\left[C + \int (1 - m)\, qe^{\int (1-m)p\, dx}\, dx\right].$$

Учитывая, что $z = y^{1-m}$, получим:

$$y = \left\{e^{-\int (1-m)p\, dx}\left[C + \int (1 - m)\, qe^{\int (1-m)p\, dx}\, dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}} \tag{12}$$

— общее решение уравнения (10).

Помимо общего решения (12), уравнение Бернулли (10) при $m > 0$ имеет еще одно решение $y = 0$, не получаемое из общего.

Замечание 1. При решении уравнения Бернулли нет необходимости пользоваться готовой формулой (12); проще воспользоваться подстановкой $z = y^{1-m}$, превращая его в линейное уравнение.

Пример 3. Решить уравнение $x\frac{dy}{dx} - 3y + x^4y^2 = 0$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = -x^3y^2.$$

Это есть уравнение Бернулли; здесь $m = 2$. Делим обе части уравнения на $(-y^2)$, получаем: $-y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y^{-1} = x^3$. Вводим новую функцию $z = y^{-1}$, тогда $\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$ и уравнение принимает вид:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = x^3.$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение. Его общее решение находим по формуле (6):

$$z = e^{-\int \frac{3}{x}dx}\left[C + \int x^3 e^{\int \frac{3}{x}dx}\,dx\right] = e^{-3\ln|x|}\left(C + \int x^3 e^{3\ln|x|}\,dx\right) =$$

$$= |x|^{-3}\left(C + \int x^3 |x|^3\,dx\right) = \frac{x^4}{7} + \frac{C'}{x^3}.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то имеем: $\frac{1}{y} = \frac{x^7 + 7C'}{7x^3}$, или $y = \frac{7x^3}{x^7 + C_1}$. Это и есть общее решение заданного уравнения.

Замечание 2. Практически для решения уравнения Бернулли нет необходимости предварительно преобразовывать его в линейное; уравнение Бернулли можно интегрировать непосредственно тем же методом вариаций произвольной постоянной, что и линейное.

§ 88. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Рассмотрим еще один класс дифференциальных уравнений, решение которых сводится к квадратурам.

Возьмем дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной относительно x и y дифференциальной форме:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \qquad (1)$$

Может случиться, что левая часть уравнения (1) будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т. е. $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = dU(x, y)$. В этом случае уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах;* такое уравнение может быть переписано в виде:

$$dU(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Если функция $y(x)$ является решением уравнения (2), то $dU[x, y(x)] \equiv 0$, откуда следует, что $U[x, y(x)] \equiv C$*), где C— произвольная постоянная.

Обратно, если некоторая функция $y(x)$ обращает в тождество уравнение $U(x, y) = C$, то, дифференцируя полученное тождество, будем иметь $dU[x, y(x)] \equiv 0$. Следовательно, соотношение $U(x, y) = C$, содержащее произвольную постоянную, определяет совокупность интегралов уравнения (1).

*) Область изменения x предполагается некоторым промежутком.

Таким образом, чтобы проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах (1), надо найти функцию $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен выражению $Mdx + Ndy$, и приравнять ее произвольной постоянной.

Пример 1. Решить уравнение $\cos(x - y)\,dx - \cos(y - x)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Левая часть данного уравнения представляет собой полный дифференциал функции $U = \sin(x - y)$. Поэтому общий интеграл рассматриваемого уравнения будет: $\sin(x - y) = C$.

Пример 2. Решить уравнение $(x + y)\,dx + (x + 2y - e^y)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые так, чтобы каждая группа представляла собой полный дифференциал некоторой функции $(x\,dx + 2y\,dy) + (y\,dx + x\,dy) - e^y dy = 0$, или $d\left(\frac{x^2}{2} + y^2\right) + d(xy) - de^y = 0$, откуда

$$d\left(\frac{x^2}{2} + y^2 + xy - e^y\right) = 0.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и равенство $\frac{x^2}{2} + y^2 + xy - e^y = C$ есть общий интеграл этого уравнения.

В рассмотренных примерах отыскание неизвестной функции $U(x, y)$ производилось методом подбора, которое легко удается лишь в простейших случаях. Кроме того, в ряде случаев заранее неизвестно, существует ли такая функция $U(x, y)$ вообще. Поэтому постараемся установить те условия, при которых существует функция $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен заданному выражению $M\,dx + N\,dy$, и если она существует, то как ее найти.

Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области D. Тогда, как мы знаем (§ 78), необходимым и достаточным условием, при котором выражение $Mdx + Ndy$ в области D представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, является тождественное выполнение в этой области равенства

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

Для отыскания функции по ее полному дифференциалу были установлены формулы (§ 79):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy + C_1 \tag{4}$$

и

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1. \tag{5}$$

Взяв одну из функций (4) или (5), например, ту, у которой $C_1 = 0$, и «приравняв» ее произвольной постоянной C, получим общий интеграл уравнения (1) в следующем виде:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy = C, \tag{6}$$

или в виде:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{7}$$

В формулах (6) и (7) нижние пределы интегрирования x_0 и y_0 можно выбирать произвольно (но, разумеется, так, чтобы отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x, y), принадлежал области D). На практике их выбирают так, чтобы вычисление соответствующих интегралов по возможности упрощалось.

Пример 3. Решить уравнение $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Здесь $M(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, $N(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y$ — непрерывные функции на всей плоскости. Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Для получения общего интеграла этого уравнения воспользуемся формулой (6), где положим $x_0 = y_0 = 0$, тогда получим:

$$\int_{0}^{x} 3x^2 dx + \int_{0}^{y} (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = C.$$

Выполнив интегрирование, найдем: $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = C$ — общий интеграл исходного уравнения.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $x\,dx + y\,dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е. Представим уравнение в следующем виде:

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0^{*}).$$

Здесь $M = x - \frac{y}{x^2 + y^3}$, $N = y + \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ — непрерывные функции во всех точках плоскости, за исключением точки $x = y = 0$. Равенство (3) выполняется. По формуле (7), где положим $x = 0$, $y = 1$, найдем: $\int_{0}^{x} \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \int_{1}^{y} y\,dy = C$, или

$$\frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = C -$$

общее решение данного уравнения.

*) Приводить уравнение к целому виду здесь не рекомендуется, так как после этого преобразования левая часть не будет полным дифференциалом.

§ 89. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y dx - x dy = 0. \tag{1}$$

Здесь $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Следовательно, уравнение (1) не есть уравнение в полных дифференциалах. Помножим обе части уравнения (1) на функцию $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, тогда это уравнение примет вид: $\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$, или $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$. Теперь $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$. Таким образом, умножение обеих частей уравнения (1) на функцию $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ превращает его в уравнение в полных дифференциалах. Так же можно было бы убедиться, что умножение обеих частей этого уравнения на функцию $\frac{1}{y^2}$ или на функцию $\frac{1}{xy}$ также превращает его в уравнение в полных дифференциалах. Этот пример показывает, что если уравнение

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2}$$

не является уравнением в полных дифференциалах, то по крайней мере в некоторых случаях можно подобрать такую функцию $\lambda(x, y)$, после умножения на которую обеих частей уравнения (2) последнее становится уравнением в полных дифференциалах. Такая функция называется *интегрирующим множителем* данного уравнения.

Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее общий интеграл, имеет бесконечное множество интегрирующих множителей. На доказательстве этого факта мы останавливаться не будем. Ограничимся лишь рассмотрением вопроса о способе нахождения интегрирующего множителя $\lambda(x, y)$. При этом относительно функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ мы так же, как и в предыдущем параграфе, предполагаем, что они непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой односвязной области и ни в одной точке этой области $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$, а от интегрирующего множителя $\lambda(x, y)$ мы потребуем, чтобы он не обращался в нуль и имел непрерывные частные производные первого порядка.

Если $\lambda(x, y)$ есть интегрирующий множитель уравнения (2), то произведение $\lambda(Mdx + Ndy)$ будет полным дифференциалом. Необходимым и достаточным условием этого (при указанных выше ограничениях) является выполнение равенства (§ 78):

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x},$$

которое можно переписать в виде: $\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \lambda}{\partial x}$, или

$$N \frac{\partial \lambda}{\partial x} - M \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \lambda. \tag{3}$$

Это уравнение в частных производных с неизвестной функцией $\lambda(x, y)$. Таким образом, интегрирующий множитель $\lambda(x, y)$ является решением уравнения (3) в частных производных. Отыскание решений этого уравнения в общем случае не проще, чем отыскание общего интеграла уравнения (2). Но для нашей цели достаточно знать какое-либо одно частное решение уравнения (3)*). В некоторых случаях удается найти такое решение и тем самым свести интегрирование уравнения (2) к квадратурам.

Рассмотрим тот случай, когда уравнение (2) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от одной переменной x: $\lambda = \lambda(x)$. В этом случае $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$, и основное уравнение (3), определяющее интегрирующий множитель, имеет вид: $N \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \lambda$, или (предполагая, что $N \not\equiv 0$)

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{M'_y - N'_x}{N}. \tag{4}$$

Так как по предположению λ есть функция только от x, то левая часть тождества (4) также есть функция только x, но тогда и правая часть этого тождества должна быть функцией только x (в частности, константой). Следовательно, для существования интегрирующего множителя вида $\lambda = \lambda(x)$ необходимо, чтобы выражение $\frac{M'_y - N'_x}{N}$ представляло функцию только x. Обозначим ее через $\varphi(x)$:

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x). \tag{5}$$

При этом (4) имеет вид:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \varphi(x), \quad \text{или} \quad [\ln \lambda(x)]' = \varphi(x),$$

откуда

$$\lambda = Ce^{\int \varphi(x)\, dx}, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная ($C \neq 0$).

*) Очевидно, тривиальное решение $\lambda = 0$ уравнения (3) не представляет интереса.

Итак, мы видим, что если уравнение (2) имеет интегрирующий множитель, который зависит только от x, то таких множителей у уравнения (2) существует бесчисленное множество; эти множители можно получить из выражения $Ce^{\int \varphi(x)\,dx}$, приписывая C произвольные значения. Для нашей цели достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель, поэтому, считая в формуле (6) $C=1$, получим:

$$\lambda = e^{\int \varphi(x)\,dx}. \tag{7}$$

Докажем теперь, что и наоборот: если выражение $\frac{1}{N}(M'_y - N'_x)$ зависит только от x, т. е. если выполняется условие (5), то функция (7) является интегрирующим множителем уравнения (2). Действительно, при выполнении условия (5) уравнение (3) принимает вид:

$$N\frac{\partial \lambda}{\partial x} - M\frac{\partial \lambda}{\partial y} = N\varphi(x)\lambda. \tag{8}$$

Подстановкой функции (7) в уравнение (8) убеждаемся, что (7) является решением этого уравнения и, следовательно, функция (7) служит интегрирующим множителем уравнения (2). На основании этого можем сказать, что для существования у уравнения (2) интегрирующего множителя, являющегося функцией только x, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{1}{N}(M'_y - N'_x)$ было функцией только x. В этом случае интегрирующий множитель может быть найден по формуле:

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{N}(M'_y - N'_x)\,dx}. \tag{9}$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что для существования у уравнения (2) интегрирующего множителя, являющегося функцией только от y: $\lambda = \lambda(y)$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{1}{M}(N'_x - M'_y)$ являлось функцией только от y, при этом

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{1}{M}(N'_x - M'_y)\,dy}.$$

Замечание. Если функция $\lambda = \lambda(x, y)$ есть интегрирующий множитель уравнения (2), то мы имеем:

$$\lambda(M\,dx + N\,dy) = dU. \tag{10}$$

Очевидно, если уравнение $\lambda(x, y) = 0$ определяет y как некоторую функцию от x (или x как функцию от y), то эта функция, входя в состав общего интеграла уравнения $dU = 0$, может ока-

заться посторонним решением для уравнения (2). С другой стороны, переписав (10) в виде:

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{\lambda}\, dU,$$

мы замечаем, что выражение $Mdx + Ndy$ может обратиться в нуль, во-первых, при $dU = 0$, что приводит к общему интегралу $U(x, y) = C$. Во-вторых, выражение $Mdx + Ndy$ может стремиться к нулю для таких функций $y = f(x)$ (или $x = \varphi(y)$), для которых $\lim\limits_{\substack{y \to f(x) \to +\infty \\ (x \to \varphi(y) \to +\infty)}} \lambda(x, y) = \infty$. О таких функциях условно говорят, что они обращают дробь $\frac{1}{\lambda}$ в нуль, или удовлетворяют уравнению $\frac{1}{\lambda} = 0$ и считают их решениями для (2). Поэтому, если уравнение (2) решено с помощью интегрирующего множителя λ, то к общему интегралу $U(x, y) = C$ этого уравнения надо, быть может, добавить еще интегралы упомянутого выше вида, т. е. $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$, и удалить из $u(x, y) = C$ интегралы, определяемые уравнением $\lambda = 0$.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^5 - 3y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0. \tag{11}$$

Р е ш е н и е. Это уравнение не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни однородным, ни линейным. Здесь $M = x^5 - 3y^2$, $N = 2xy$, $M'_y = -6y$, $N'_x = 2y$, $M'_y \neq N'_x$. Следовательно, левая часть уравнения (4) не есть полный дифференциал. Заметив, что $\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$, заключаем, что уравнение (11) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Находим его по формуле (9):

$$\lambda(x) = e^{-4\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}.$$

Умножив на него обе части уравнения (11), получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{x^5 - 3y^2}{x^4}\, dx + \frac{2xy\, dy}{x^4} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения находим по формуле (6) § 88, положив в ней $x_0 = 1$, $y_0 = 0$:

$$\int_1^x x\, dx + \frac{2}{x^3} \int_0^y y\, dy = C, \text{ или } \frac{y^2}{x^3} + \frac{x^2}{2} = C_1.$$

Кроме того, из уравнения $\frac{1}{\lambda} = -\frac{x}{4} = 0$ дополнительно получаем решение $x = 0$, не вытекающее из общего.

Так как $\lambda = -\frac{4}{x} \neq 0$, то посторонних решений в общем интеграле не содержится.

ГЛАВА XIII.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

В предыдущей главе были рассмотрены некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения и уравнения в полных дифференциалах. Мы видели, что такие уравнения имеют решения, и отыскание этих решений сводится к вычислению квадратур. Но рассмотренными уравнениями далеко не исчерпываются различные типы уравнений первого порядка и далеко не для всяких из них решение может быть выражено в квадратурах. Так, французский математик Ж. Лиувилль (1809—1882) доказал, что решение уравнения Я. Риккати*) $y' + py + qy^2 = r$, где p, q и r — функции от x, в общем случае нельзя выразить в квадратурах от элементарных функций. Таким образом, класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, весьма узок. Поэтому на практике часто пользуются приближенными методами решений уравнений, которые применимы к очень широкому классу дифференциальных уравнений. Но, прежде чем приступить к приближенному нахождению решений, нужно иметь уверенность в самом существовании искомого решения (а в ряде случаев и в его единственности). В частности, эта постановка вопроса относится и к нахождению решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям. Таким образом, возникает вопрос, всегда ли существует решение задачи Коши, и если существует, будет ли оно единственным.

§ 80. ТЕОРЕМА КОШИ

В этом параграфе мы докажем теорему (Коши) существования и единственности решения, удовлетворяющего начальным условиям, для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, правая часть которого подчиняется некоторым условиям. Доказательство этой теоремы будет проведено *методом последовательных приближений* (методом Пикара), который не только устанавливает, что решение существует, но и дает возможность приближенно выразить это решение.

*) Риккати (1676—1754) — итальянский математик.

Теорема. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (1)$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой ограниченной области D и (x_0, y_0) — какая-либо внутренняя точка этой области. Тогда, если выполняются следующие условия:

1) *существуют такие постоянные числа $a > 0$ и $b > 0$, что функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R: $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$; $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$ ($R \subset D$)* (откуда следует (§ 41), что функция $f(x, y)$ ограничена в R, т. е. существует такое число $M > 0$, что $|f(x, y)| \leqslant M$ для всех $(x, y) \in R$);

2) *существует такое число $N > 0$, что для любых двух точек $(x, \bar{y})$ и $(x, \bar{\bar{y}})$ из области R (отличающихся только ординатами) выполняется неравенство* (условие Липшица):

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \leqslant N|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|, \qquad (2)$$

то данное уравнение имеет решение $y = Y(x)$, определенное на сегменте $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \ (\text{так что } Y(x_0) = y_0), \qquad (3)$$

причем это решение является единственным на указанном сегменте.

Доказательство. Прежде всего покажем, что уравнение (1), в котором функция $y(x)$ удовлетворяет условию (3), равносильно следующему уравнению:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \qquad (4)$$

В силу того что в уравнение (4) неизвестная функция y входит хотя бы однажды под знак интеграла, это уравнение называется *интегральным уравнением.*

Пусть функция $Y(x)$ на сегменте L: $[x_0 - h, x_0 + h]$ — есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (3). В таком случае на L выполняется тождество:

$$\frac{dY(x)}{dx} = f[x, Y(x)]. \qquad (5)$$

Рассматривая правую часть этого тождества как сложную функцию от x и замечая, что функции $\frac{dY}{dx}$ и $f[x, Y(x)]$ по условию непрерывны на L, возьмем от каждой части (5) опреде-

ленный интеграл по переменной x в пределах от x_0 до некоторого значения x из L:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dY(x)}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x} f[x,\ Y(x)]\,dx, \text{ или}$$

$$Y(x) - Y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f[x,\ Y(x)]\,dx.$$

Принимая во внимание, что $Y(x_0)=y_0$, перепишем это тождество так:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x,\ Y(x)]\,dx. \tag{6}$$

Мы видим, что решение $Y(x)$ уравнения (1) с начальными условиями (3) является решением интегрального уравнения (4).

Обратно, пусть непрерывная на L функция $Y(x)$ есть решение уравнения (4) на этом сегменте, и притом такое, что для любого x из сегмента L точка $(x, Y(x))$ содержится в R. Подставляя тогда $Y(x)$ в уравнение (4), получим тождество (6). Подынтегральная функция $f[x, Y(x)]$, рассматриваемая как сложная функция от x, будет непрерывной функцией на сегменте L, так как функция $f(x, y)$ непрерывна в R, а функция $Y(x)$ согласно предположению непрерывна на сегменте L и точка $(x, Y(x))$ не выходит при этих значениях x из R. Следовательно, функция $Y(x)$ из левой части тождества (6) имеет производную на сегменте L (т. I, § 100). Продифференцировав обе части тождества (6) по верхнему пределу x, мы получим тождество (5), откуда видно, что функция $Y(x)$ на сегменте L удовлетворяет уравнению (1). Кроме этого, из (6) следует, что $Y(x_0) = y_0$, т. е. что функция $Y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (3). Таким образом, для доказательства теоремы Коши достаточно доказать существование и единственность такого решения интегрального уравнения (4), которое удовлетворяет начальным условиям (3).

Сначала докажем существование решения интегрального уравнения (4). Построим на сегменте L функции, являющиеся последовательными приближенными решениями уравнения (4). В качестве исходного (нулевого) приближенного решения уравнения (4) возьмем функцию, равную тождественно постоянному числу y_0, т. е. начальному значению искомой функции в точке x_0 : $Y(x_0) = y_0$*). Далее, первое приближение к искомой функции построим следующим образом. Возьмем функцию $y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$

*) В качестве исходной функции можно было бы выбрать любую непрерывную функцию.

($x \in L$) и подставим в ее выражение y_0 вместо y, полученную при этом функцию переменной x обозначим через $y_1(x)$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx. \tag{7}$$

Эту функцию и примем за первое приближение к искомой функции.

Аналогично строим последующие приближения, а именно полагаем:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx,$$

. . . . . .

$$y_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-2})\, dx, \tag{8}$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx.$$

и т. д.

Убедимся, что такое построение функций $y_n(x)$ по формулам (7) и (8) возможно. Начнем с функции $y_1(x)$, определяемой формулой (7). Здесь подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна на сегменте L, следовательно, определенный интеграл с переменным верхним пределом $\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$ существует и, таким образом, имеет смысл говорить о функции $y_1(x)$. Так как интеграл $\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$ с переменным верхним пределом есть функция непрерывная на сегменте L, то и функция $y_1(x)$ непрерывна на этом сегменте.

Далее, из формулы для $y_1(x)$ имеем:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx \right|.$$

Переменная x изменяется на сегменте L, следовательно, точка (x, y_0) при этом принадлежит области R, в которой выполняется неравенство $|f(x, y)| \leqslant M$. Поэтому

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh.$$

Так как $h \leqslant \frac{b}{M}$, то $|y_1(x) - y_0| \leqslant b$. Полученное неравенство показывает, что при изменении x на сегменте L значения функции $y_1(x)$ принадлежат сегменту $[y_0 - b, y_0 + b]$.

Таким образом, функция $y_1(x)$ определена и непрерывна на сегменте L и для значений x из этого сегмента точка $(x, y_1(x))$ не выходит из R.

Сделаем индуктивное предположение: при изменении x на сегменте L функция $y_{n-1}(x)$ определена и непрерывна и точка $(x, y_{n-1}(x))$ не выходит из R. Докажем, что это будет верно и для функции $y_n(x)$, определяемой по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx. \tag{9}$$

Из предположения следует, что функция $f(x, y_{n-1})$, рассматриваемая как сложная функция от x, непрерывна на сегменте L, а потому имеет смысл говорить о функции $y_n(x)$. Эта функция, очевидно, непрерывна на сегменте L.

Оценим теперь по абсолютной величине разность $y_n(x) - y_0$. Имеем из (9):

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f|(x, y_{n-1})|\,dx\right|.$$

Так как по условию значения аргументов функции $f(x, y_{n-1})$ принадлежат R, то $|f(x, y_{n-1})| \leqslant M$. Поэтому

$$|y_n - y_0| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant M\frac{b}{M}, \quad |y_n - y_0| \leqslant b,$$

т. е. n-е приближение также не выходит из сегмента $[y_0 - b, y_0 + b]$ при $|x - x_0| \leqslant h$. Отсюда, по принципу математической индукции, заключаем, что все функции, построенные по формулам (7) и (8), определены и непрерывны для x из сегмента L, и точка $(x, y_n(x))$ не выходит при этих значениях x из R.

Докажем теперь, что построенная нами последовательность функций $\{y_n(x)\}$ равномерно сходится на сегменте L. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \tag{10}$$

так как $(n+1)$-я частичная сумма S_{n+1} этого ряда $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ как раз равна y_n. Оценим абсолютную величину членов ряда (10):

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| \leqslant M|x - x_0|, \tag{11}$$

далее,

$$|y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_1) - f(x, y_0)\}\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)|\,dx\right|.$$

Здесь подынтегральная функция есть абсолютная величина разности значений функции $f(x, y)$ для одного и того же значения x, но различных y, причем точки (x, y_0) и (x, y_1) находятся в области R, поэтому для оценки абсолютной величины разности $f(x, y_1) - f(x, y_0)$ мы можем воспользоваться условием Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leqslant N|y_1 - y_0|.$$

Принимая во внимание оценку (11), получаем: $|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leqslant MN|x - x_0|$. Следовательно,

$$|y_2 - y_1| \leqslant MN \left| \int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx \right| = MN \frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

(при $x > x_0$

$$\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx = \int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx = \frac{(x - x_0)^2}{2},$$

а при $x < x_0$

$$\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx = -\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx = -\frac{(x - x_0)^2}{2}\Big).$$

Предположим теперь, что справедлива оценка:

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n. \tag{12}$$

Покажем, что тогда имеет место следующая оценка:

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant \frac{MN^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Действительно,

$$|y_{n+1} - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})|\, dx \right| \leqslant N \left| \int_{x_0}^{x} |y_n - y_{n-1}| dx \right|,$$

откуда, пользуясь предположенной оценкой (12), получаем:

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant N \frac{MN^{n-1}}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} |x - x_0|^n\, dx \right| = \frac{MN^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1},$$

т. е. оценка вида (12) имеет место при сделанном допущении и для $n + 1$. Но мы уже видели, что такая оценка (12) справедлива для $n = 1$. Следовательно, она верна для любого натурального числа n.

Заменив в правой части неравенства (12) величину $|x - x_0|$ ее наибольшим допустимым значением h, получим неравенство:

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant MN^{n-1} \frac{h^n}{n!}. \tag{13}$$

Составим следующий числовой ряд с положительными членами:

$$Mh + MN\frac{h^2}{2!} + MN^2\frac{h^3}{3!} + \ldots + MN^{n-1}\frac{h^n}{n!} + \ldots . \qquad (14)$$

Применяя к этому ряду признак Даламбера, находим:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{MN^n h^{n+1} n!}{(n+1)!\, MN^{n-1}h^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{Nh}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд (14) сходится. Но соотношение (13) показывает, что для всех значений x из сегмента L каждый член функционального ряда (10) (если не обращать внимание на первый член y_0) не превосходит по абсолютной величине соответствующего члена ряда (14) с положительными членами. Следовательно, согласно признаку Вейерштрасса (§ 14), ряд (10) сходится, и притом равномерно, на сегменте $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, а значит, и последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится равномерно на этом сегменте.

Обозначим сумму ряда (10), или, что то же, предельную функцию последовательности $\{y_n(x)\}$, через $Y(x)$. Так как все члены этой последовательности непрерывны на сегменте L и она сходится равномерно на этом сегменте, то по теореме о непрерывности предельной функции (§ 12) функция $Y(x)$ также непрерывна на сегменте L, т. е. функция $Y(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x)$ определена на сегменте L и является непрерывной функцией на нем. При этом для предельной функции $Y = Y(x)$ при $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ будет $|Y(x) - y_0| \leqslant b$. Действительно, при любом n имеем: $y_0 - b \leqslant y_n \leqslant y_0 + b$. Переходя к пределу в этих неравенствах, получим: $y_0 - b \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \leqslant y_0 + b$, т. е. $y_0 - b \leqslant Y(x) \leqslant y_0 + b$ или $|Y(x) - y_0| \leqslant b$. Поэтому интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f[x, Y(x)]\,dx$ существует для всех x из сегмента L.

Заметив это, докажем, что предельная функция $Y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4). Мы можем написать тождество:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)]\,dx + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx. \qquad (15)$$

Оценим абсолютную величину первого интеграла

$$\left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)]\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1} - Y|\,dx\right|.$$

(Мы воспользовались здесь условием Липшица: $y_{n-1}(x)$ и $Y(x)$, не выходят из сегмента $[y_0 - b,\ y_0 + b]$.)

Возьмем теперь произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда, так как последовательность функций $\{y_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $Y(x)$ на сегменте L, найдется натуральное число k, такое, что при $n > k$ выполнится неравенство

$$|y_{n-1}(x) - Y(x)| < \frac{\varepsilon}{Nh}$$

для всех значений x, принадлежащих сегменту L. Поэтому

$$\left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)]\,dx\right| < N\frac{\varepsilon}{Nh}\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| < \frac{\varepsilon}{h}|x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{h}h = \varepsilon$$

для $n > k$ и для всех x из сегмента $[x_0 - h, x_0 + h]$, а это означает, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} [f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)]\,dx = 0.$$

С другой стороны, по доказанному, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x) = Y(x)$. Поэтому, переходя в тождестве (15) к пределу, получим тождество:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx,$$

которое и означает, что $Y(x)$ есть решение интегрального уравнения (4)*). Тогда, как показано выше, функция $Y(x)$ есть одновременно и решение дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (3), определенное на сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Таким образом, существование решения данного уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (3), доказано.

Остается доказать единственность полученного решения, удовлетворяющего начальным условиям (3). Допустим противное: на сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$, кроме решения $Y(x)$, существует еще одно решение $Z(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее тем же начальным условиям (3): $Z(x_0) = y_0$.

По предположению, $Z(x)$ не тождественно с $Y(x)$ на $[x_0 - h, x_0 + h]$. Не нарушая общности доказательства, мы можем считать, что точки, в которых $Z(x) \neq Y(x)$, имеются справа от точки x_0 в любой близости от нее**), т. е., каково бы ни было положительное

---

*) Тем самым доказано, что функции $y_n(x)$ заслуживают названия приближений для искомого решения.

**) Если бы такие точки были только слева от точки x_0, то мы заменили бы x на $-x$; а если как справа, так и слева в некоторой окрестности точки x_0 вообще не было бы точек, в которых $Y(x) \not\equiv Z(x)$, то мы в качестве точки x_0 рассмотрели бы точку, в достаточной близости которой значения $Y(x)$ и $Z(x)$ перестают быть равными.

число $\varepsilon \leqslant h$, на сегменте $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ будет $Z(x) \not\equiv Y(x)$; выберем число ε еще так, чтобы оно было меньше $\frac{1}{N}$.

На сегменте $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ положительная функция $|Z(x) - Y(x)|$ непрерывна. Следовательно, по крайней мере в одной точке x_1 сегмента $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ эта функция достигает наибольшего значения; обозначим его через A:

$$|Z(x_1) - Y(x_1)| = A > 0, \tag{16}$$

причем $x_1 \neq x_0$, так как при $x = x_0$ обе функции $Z(x)$ и $Y(x)$ равны между собой.

Так как $Y(x)$ и $Z(x)$ — решения уравнений (1), а следовательно, и (4), то имеем тождества:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\, dx, \tag{17}$$

$$Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Z)\, dx. \tag{18}$$

Вычитая почленно тождество (18) из тождества (17), получим:

$$Y(x) - Z(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x, Y) - f(x, Z)]\, dx. \tag{19}$$

Полагая в (19) $x = x_1$, найдем:

$$Y(x_1) - Z(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, Y) - f(x, Z)]\, dx. \tag{20}$$

Пользуясь условием Липшица (2) и учитывая (16), находим из (20):

$$A = |Y(x_1) - Z(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} [f(x, Y) - f(x, Z)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x_1} |f(x, Y) - f(x, Z)|\, dx \leqslant N \int_{x_0}^{x_1} |Y(x) - Z(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant N \int_{x_0}^{x_1} |Y(x_1) - Z(x_1)|\, dx = N \int_{x_0}^{x_1} A\, dx = NA(x_1 - x_0) < NA\varepsilon,$$

откуда, так как по предположению $A \neq 0$, находим, что $1 < N\varepsilon$, или $\varepsilon > \frac{1}{N}$. Последнее неравенство противоречит выбору $\varepsilon \left(\varepsilon < \frac{1}{N}\right)$.

Таким образом, предположение, что существует второе решение уравнения (1) на сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$, удовлетворяющее тем же начальным условиям (3), приводит к противоречию. Следова-

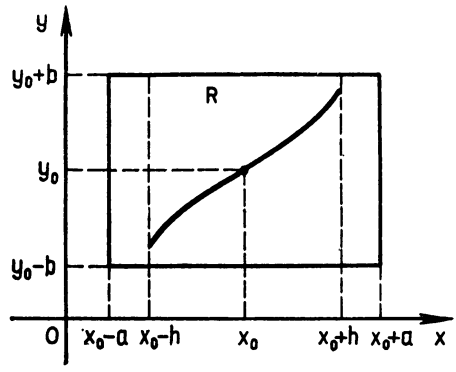


Рис. 103

тельно, построенное выше (методом Пикара) решение $Y(x)$ уравнения (1) единственное.

Теорема полностью доказана — задача Коши при поставленных в теореме условиях имеет решение, и притом единственное.

Геометрическое содержание доказанной теоремы заключается в том, что при некоторых условиях через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1). Эта кривая не выйдет за пределы прямоугольника R через его верхнюю или нижнюю горизонтальные стороны ни при каком значении $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ (рис. 103).

Замечание 1. Теорема Коши была доказана при выполнении условия Липшица. Это условие может быть заменено другим, несколько более сильным, но зато более удобным для проверки требованием существования и ограниченности частной производной $f'_y(x, y)$ в области R, т. е. требованием $|f'_y(x, y)| \leqslant N$, где N — некоторое постоянное. В самом деле, если $f'_y(x, y)$ существует в области R, то по теореме Лагранжа имеем: $f(x, y') - f(x, y'') = f'_y(x, \eta)(y' - y'')$, где точки (x, y') и (x, y'') принадлежат области R, а η — промежуточное между y' и y'' значение. Поскольку точка (x, η) принадлежит области R, то $|f'_y(x, \eta)| \leqslant N$ и $|f(x, y') - f(x, y'')| \leqslant N|y' - y''|$, т. е. выполняется неравенство Липшица*).

Заметим еще, что в рассматриваемой теореме вместо прямоугольника R с центром в точке (x_0, y_0) можно было бы взять произвольную замкнутую ограниченную область $D_1 (D_1 \subset D)$, содержащую точку (x_0, y_0), но мы для упрощения доказательства здесь рассматривали только замкнутую прямоугольную область.

Замечание 2. Существование и единственность решения уравнения (1) доказаны лишь для промежутка $[x_0 - h, x_0 + h]$ (где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$).

Предположим, что $h < a$ и в точке $x = x_0 + h$ решение $y = Y(x)$ не достигает границы области R, т. е. $|Y(x_0 + h) - y_0| < b$. Возь-

*) Следует заметить, что условие Липшица может оказаться выполненным и тогда, когда производная $f'_y(x, y)$ не существует в некоторых точках области R. Например, для функции $f(x, y) = |y|$ условие Липшица выполняется во всей плоскости xOy: $|f(x, y') - f(x, y'')| = ||y'| - |y''|| \leqslant |y' - y''|$ $(N = 1)$, тогда как производная $f'_y(x, y)$ данной функции не существует в точках оси Ox $(y = 0)$.

мем точку $[x_0 + h, y(x_0 + h)]$ за начальную. Тогда, если в некоторой окрестности этой точки выполняются условия теоремы существования и единственности решения, повторив предыдущие рассуждения, можно продолжить найденное решение, т. е. можно найти такую функцию $y = \overline{Y}(x)$, определенную в некотором промежутке, содержащем внутри себя промежуток $[x_0 - h, x_0 + h]$, которая совпадала бы с функцией $y = Y(x)$ во всех точках промежутка $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Следует заметить, что изложенный способ доказательства существования решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям, дает в то же время и метод приближенного нахождения этого решения. Именно функции $y_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определяемые по формулам (7) и (8), и дают приближения к искомому решению уравнения (1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = Y(x)$, то при достаточно большом значении n приближение $y_n(x)$ как угодно мало отличается от решения $Y(x)$ уравнения (1) на сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Отметим также, между прочим, что при помощи других методов можно доказать теорему Коши в более общих предположениях. Так, итальянский математик Пеано доказал существование решения только при условии непрерывности функции $f(x, y)$. Однако, если не подчинить функцию $f(x, y)$ добавочным условиям, начальные условия, вообще говоря, будут определять уже не одно решение.

§ 91. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

В главе XII мы установили нестрогим образом понятие общего и частного решений, общего и частного интеграла дифференциального уравнения (1). В настоящем параграфе мы уточним эти понятия.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная в замкнутой области R функция, имеющая в этой области ограниченную частную производную по y. Тогда, какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) замкнутой области R, существует и притом единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), определенное в некотором промежутке, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее условию $\varphi(x_0) = y_0$. Геометрически это означает, что через точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1). Покажем, что, если не задаваться конкретными начальными условиями, то данное уравнение (1) в R имеет бесконечное множество различных решений. Для этого возьмем в качестве начальных данных числа x_0 и y_1. Число y_1 мы берем любым, отличным от y_0, и так, чтобы точка (x_0, y_1) являлась внутренней

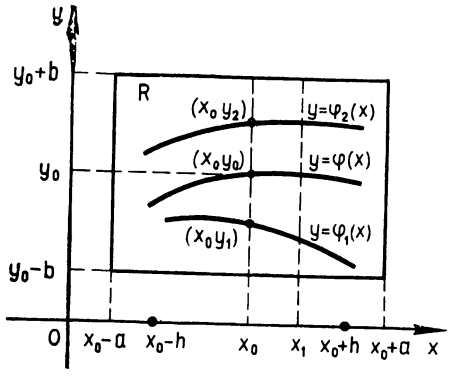


Рис. 104

точкой из R. По теореме Коши, эти начальные данные определяют некоторое решение $y = \varphi_1(x)$ уравнения (1) на соответствующем сегменте. Так как функция $y = \varphi(x)$ не может в точке $x = x_0$ принимать два различных значения, то решение $y = \varphi_1(x)$ будет отлично от решения $y = \varphi(x)$, определяемого начальными данными x_0, y_0. Геометрически это означает, что через точку (x_0, y_1) пройдет интегральная кривая, которая не будет совпадать с интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Очевидно, начальные данные x_0 и y_2 (где $y_2 \neq y_0$, $y_2 \neq y_1$) и точка (x_0, y_2), внутренняя из R, определяют новое решение $y = \varphi_2(x)$ уравнения (1), отличное от решений $y = \varphi(x)$ и $y = \varphi_1(x)$, и т. д. (рис. 104).

Но легко видеть, что переход от начальной абсциссы $x = x_0$ к другой абсциссе $x = x_1$ из промежутка, в котором определено решение $y = \varphi(x)$, не приведет к получению нового решения уравнения (1), так как любая точка прямой $x = x_1$ лежит на одной из интегральных кривых, проходящих через точку с абсциссой $x = x_0$, т. е. на уже учтенных ранее интегральных кривых.

Таким образом, если в начальных данных x_0, y_0 считать x_0 постоянным и менять только значение y_0 в некоторых пределах, то мы для каждого значения y_0 будем получать новое решение уравнения (1). Следовательно, y_0 может быть принято за параметр получаемого указанным способом множества (семейства) решений уравнения (1), т. е. $y = \varphi(x, y_0)$. Или, обозначая y_0 через C, мы можем записать решение уравнения (1) в виде:

$$y = \varphi(x, C). \tag{2}$$

Решение такого вида выше мы назвали общим решением. Однако в связи с теоремой Коши вместо этого предварительного определения вводится иное.

Пусть дифференциальное уравнение (1) задано в замкнутой ограниченной области R, в каждой внутренней точке которой выполнены условия теоремы Коши. Дадим тогда следующее определение.

Определение 1. *Общим решением дифференциального уравнения* $y' = f(x, y)$ *в области* R *называется такая функция* $y = \varphi(x, C)$, *определенная как функция двух переменных в некоторой области определения* D (*такой, что при каждом* C, *для которого* $(x, C) \in D$, *область изменения* x *есть некоторый промежуток*), *которая удовлетворяет условиям*:

1) *уравнение* $y = \varphi(x, C)$ *разрешимо для каждой точки* $(x, y) \in R - \Gamma$ (*где* Γ — *граница области* R) *относительно* C, *т. е. для любой точки* $(x_0, y_0) \in R - \Gamma$ *существует хотя бы одно такое число* C_0, *для которого* $(x_0, C_0) \in D$ *и* $\varphi(x_0, C_0) = y_0$;

2) *при всех значениях произвольной постоянной* C, *указанных в п.* 1, *функция* $y = \varphi(x, C)$ *является решением данного дифференциального уравнения.*

Определение 2. *Частным решением уравнения* $y' = f(x, y)$ *называется любая функция* $y = \varphi(x, C_0)$, *которая получается из общего решения* $y = \varphi(x, C)$, *если в последней произвольному постоянному* C *придать определенное значение* $C = C_0$ (предусмотренное определением 1).

Следовательно, решая задачу Коши при помощи формулы $y = \varphi(x, C)$ с начальными данными в области R, мы всегда получаем частное решение.

Пример. Для уравнения
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{3}$$
в области
$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \tag{4}$$
общим решением будет функция
$$y = \sqrt{x} + C \quad (0 < x < +\infty.) \tag{5}$$

Действительно, для любой точки (x_0, y_0) из области (4) можно построить замкнутую область вида $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, в которой правая часть уравнения (3) удовлетворяет всем условиям теоремы Коши: функция $f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ непрерывна, частная производная $f'_y(x, y)$ ограничена ($f'_y(x, y) \neq 0$). Далее уравнение (5) разрешимо в области (4) относительно C.
$$C = y - \sqrt{x}. \tag{6}$$

Наконец, непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция (5) удовлетворяет уравнению (3) при любом постоянном C, определяемом по (6), когда точка (x, y) пробегает область (4).

Геометрически решения (5) есть ветви парабол, оси симметрии которых параллельны оси Ox, вершины находятся на оси Oy, а остальные точки ветвей парабол (5) лежат справа от этой оси (рис. 105).

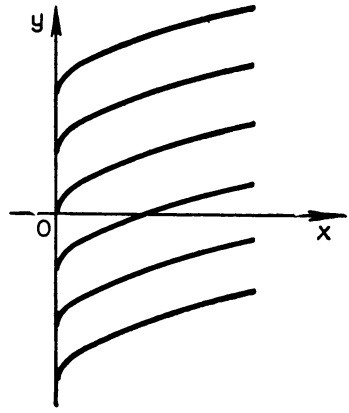


Рис. 105

Найдем решения уравнения (3), удовлетворяющие начальным условиям x_0, y_0 из области (4). Полагая в (5) $x = x_0$, $y = y_0$, имеем: $y_0 = \sqrt{x_0} + C$, откуда $C = y_0 - \sqrt{x_0}$. Подставляя это значение C в формулу (5), получаем искомое частное решение:
$$y = \sqrt{x} + y_0 - \sqrt{x_0}.$$

Замечание. Очевидно, что вообще для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ($f(x)$ — непрерывная функция) решение $y = \int f(x)\,dx + C$, где C — любое действительное число на любом задан-

ном промежутке L, есть общее решение этого уравнения: $C = y - \int f(x)\,dx$ определяется в каждой точке (x, y), где $x \in L$ и при каждом значении произвольной постоянной C функция $y = \int f(x)\,dx + C$ является решением этого дифференциального уравнения. Так как, далее, те рассмотренные выше уравнения, которые интегрировались в квадратурах (уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения и др.), в конечном счете сводились к одному или нескольким уравнениям вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$, то с точностью до тождественности производящихся при этом преобразований мы и для этих уравнений получали выше общее решение в соответствующей области значений аргумента.

§ 92. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}. \qquad (1)$$

Считая $y \neq 0$, разделим обе части данного уравнения на $3y^{\frac{2}{3}}$, получим $\frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = dx$. Интегрируя, находим: $y = (x - C)^3$ — общее решение данного уравнения. Геометрически оно представляет семейство кубических парабол.

Кроме того, уравнение (1) имеет очевидное решение $y = 0$, не содержащееся в общем решении. Графически это решение изображается осью Ox. Через каждую точку x_0 оси Ox, следовательно, проходят по крайней мере две интегральные линии: прямая $y = 0$ и кривая, получающаяся из общего решения (кубическая парабола): $y = (x - C_0)^3$, где $C_0 = x_0$ (рис. 106).

Легко понять, что через каждую точку интегральной кривой $y = 0$ проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Так, например, через точку $(x_0, 0)$ проходят интегральные кривые: Ox, ABC, $ABOD$, $ABOEK$ и т. д. В любой точке (x, y) такой кривой числа x, y и y' удовлетворяют данному уравнению, ибо взятая точка лежит либо на кривой семейства $y = (x - C)^3$, либо на прямой $y = 0$, либо на этой прямой и кривой названного семейства одновременно.

Таким образом, в каждой точке $(x_0, 0)$ интегральной кривой $y = 0$ нарушается условие единственности решения уравнения (1). Эту особенность решения дифференциального уравнения мы и возьмем в качестве признака особого решения.

Определение. *Решение дифференциального уравнения первого порядка называется особым, если через любую точку изображающей его интегральной кривой проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая того же уравнения.*

Другими словами: *особым решением* (особой интегральной кривой) *дифференциального уравнения первого порядка называется та-*

кое решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Если в каждой точке области D, в которой рассматривается уравнение

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

выполнены условия теоремы Коши: а) непрерывность $f(x, y)$; б) существование и ограниченность $f'_y(x, y)$ (см. с. 414), то, очевидно, особых решений такое уравнение не имеет. Отсюда следует, что для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялось хотя бы одно из условий теоремы Коши. Нарушение одного из них может привести (хотя и не обязательно) к тому, что либо не будет существовать ни одного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y_{x=x_0} = y_0$, либо такое решение будет не одно.

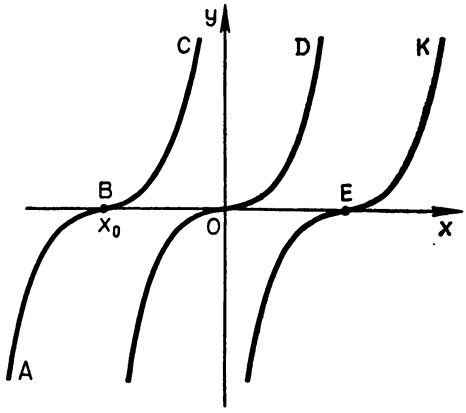


Рис. 106

В дальнейшем мы будем рассматривать особые решения только для таких дифференциальных уравнений (2), для которых $f(x, y)$ непрерывна в области D. Тогда особые интегральные кривые могут проходить только через те точки, в которых не выполняется условие существования или ограниченности $f'_y(x, y)$. Например, для уравнения (1), правая часть которого определена и непрерывна для всех значений y, как мы видели, функция $y = (x - C)^3$ является общим решением; кроме того, решением является и функция $y = 0$. В точках прямой $y = 0$ (оси Ox) производная по y от правой части уравнения (1) обращается в бесконечность:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} 3y^{\frac{2}{3}}\Big|_{y=0} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}\Big|_{y=0} = \infty.$$

Условия теоремы Коши, таким образом, нарушены в точках оси Ox.

Как было показано выше, в точках интегральной кривой $y = 0$ нарушается условие единственности решения, поэтому решение $y = 0$ уравнения (1) является особым.

Отметим, что кривая, в точках которой не выполнено условие ограниченности $f'_y(x, y)$, может и не оказаться особой интегральной кривой (хотя бы уже потому, что эта кривая вообще может не представлять решения уравнения (2)). Так, например, для уравнения

$$y' = (y - x)^{\frac{3}{2}} - 2 \qquad (3)$$

частная производная $f_y(x, y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{y-x}}$ терпит бесконечный разрыв во всех точках прямой $y = x$. Путем непосредственной подстановки функции $y = x$ в уравнение (3) убеждаемся, что эта функция не удовлетворяет данному уравнению.

Изложенное выше позволяют заключить, что для отыскания особого решения уравнения (2) нужно: 1) найти геометрическое место точек, в которых $f(x, y)$ непрерывна, а $f'_y(x, y)$ не ограничена (это множество может представлять одну или несколько кривых); 2) если такие кривые окажутся, то надо проверить, являются ли они интегральными кривыми уравнения (2); 3) если это суть интегральные кривые, то далее надо выяснить, нарушается ли в каждой из точек свойство единственности. Если два последних условия выполнены, то найденные кривые представляют особые решения.

Так как определение общего решения связано с такой замкнутой областью D, в каждой внутренней точке которой выполняется единственность решения, то, следовательно, особое решение не входит в общее решение, а значит, и не является частным решением. Отсюда следует, что особые решения могут возникать только на границе замкнутой области D.

Вместе с этим надо заметить, что уравнение (2) может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, уравнению (1) удовлетворяет функция (рис. 107)

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^3, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

которую нельзя назвать ни частным, ни особым решением. Это решение получено, так сказать, «склеиванием куска особого и частного решений».

Заметим, наконец, что если в любой окрестности некоторой точки (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ или $\frac{1}{f(x, y)}$ (с. 369) не удовлетворяют условиям теоремы Коши, то точка (x_0, y_0) называется *особой точкой* уравнения (2).

В частности, для уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{4}$$

точка (x_0, y_0) будет особой, если $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$. Такую особую точку называют *особой точкой типа* $\frac{0}{0}$.

Особая точка (x_0, y_0) называется *изолированной особой точкой*, если в некоторой достаточно малой окрестности ее нет других особых точек.

Изучение поведения интегральных кривых в окрестности особой точки составляет важный раздел теории дифференциальных

уравнений. Мы здесь ограничимся рассмотрением только нескольких примеров типичных особых точек уравнения (4).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}. \tag{5}$$

Так как в точке (0, 0) функции $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ и $\frac{1}{f(x, y)} = \frac{x}{2y}$ не определены (неопределенность вида $\frac{0}{0}$), то, следовательно, начало координат является изолированной особой точкой уравнения (5).

Интегрируя это уравнение, получим его решение $y = Cx^2$ — семейство парабол (без вершин) и решение $x = 0$ (ось Oy) дополнительного уравнения (с. 369). Все интегральные кривые примыкают к особой точке (0, 0). Особая точка дифференциального уравнения с таким расположением интегральных кривых называется *узлом* (рис. 108). Через узел проходит бесконечное множество интегральных кривых.

Пример 2. Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \tag{6}$$

Здесь так же, как и в примере 1, начало координат является изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$. Интегрируя уравнение (6), получим решения $y = \frac{C}{x}$ — семейство гипербол и ось абсцисс (без начала координат), а также решение (дополнительного уравнения) $x = 0$ (ось Oy) — без точки (0, 0) Через особую точку (0, 0) проходит только две интегральные кривые $x = 0$ и $y = 0$ — асимптоты семейства гипербол $xy = C$. Такая особая точка называется *седлом* (рис. 109).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$

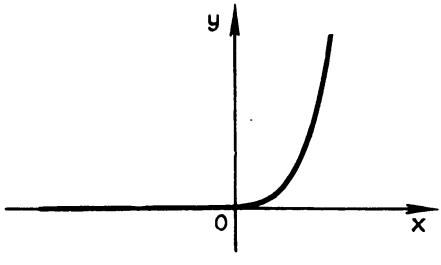


Рис. 107

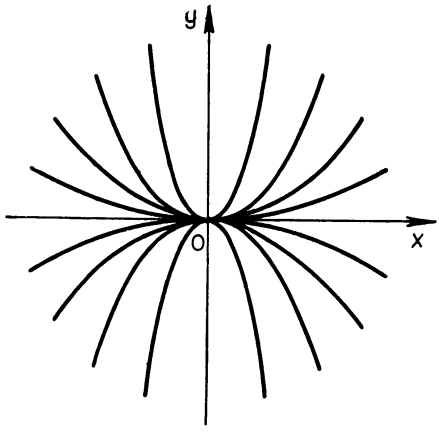


Рис. 108

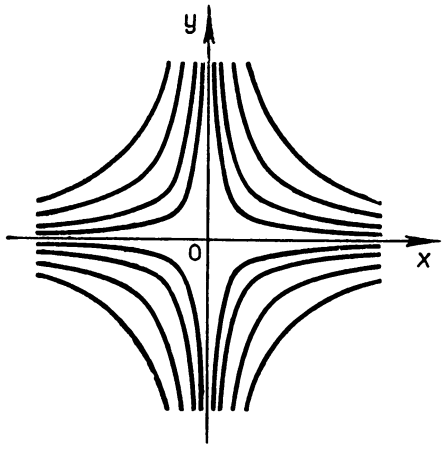


Рис. 109

Здесь снова, как и в примерах 1 и 2, начало координат является изолированной особой точкой типа $\frac{0}{0}$. Общий интеграл уравнения (7) имеет вид $x^2 + y^2 = c^2$ — семейство окружностей с центром в начале координат, т. е. все интегральные кривые замкнуты и содержат особую точку внутри себя: ни одна из интегральных кривых не проходит через особую точку. Особая точка такого типа называется *центром* (рис. 110).

Пример 4. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}. \qquad (8)$$

Правые части уравнения (8) и уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{x - y}{x + y}$ не определены только в точке (0, 0), и, следовательно, точка (0, 0) — изолированная особая точка для уравнения (8). Интегрируя рассматриваемое однородное уравнение, получим: $\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ или в полярных координатах: $\rho = C \cdot e^{\varphi}$. Это семейство логарифмических спиралей. Все интегральные кривые делают около особой точки (0, 0) бесконечное множество оборотов. Особая точка такого типа называется *фокусом* (рис. 111).

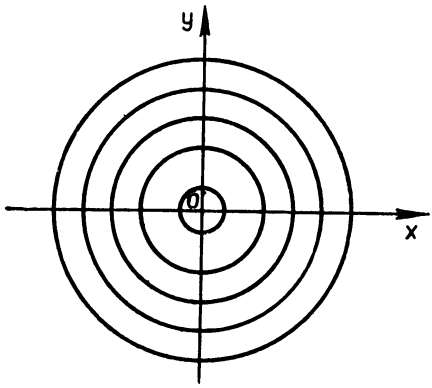


Рис. 110

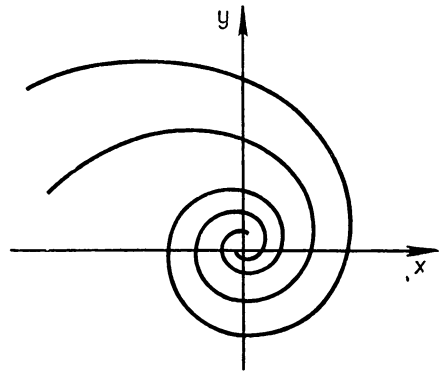


Рис. 111

ГЛАВА XIV.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В предыдущих двух главах мы ограничивались изучением дифференциальных уравнений первого порядка, которые приводились к виду, разрешенному относительно производной. В настоящей главе мы познакомимся с интегрированием дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

§ 93. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗРЕШЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет следующий вид:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная вместе со своей производной в некотором промежутке, называется *решением уравнения* (1) в этом промежутке, если она, будучи подставлена в уравнение (1), обращает его в тождество $F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] \equiv 0$, справедливое при всех значениях x из упомянутого промежутка.

Кривую на плоскости xOy, соответствующую решению $y = \varphi(x)$, называют *интегральной кривой* уравнения (1).

Пример 1. Функция $y = \varphi(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$ (при $x \neq 0$) является решением уравнения $x^2y' - 2xy - 3 = 0$, не разрешенного относительно производной. Действительно, найдя производную $y' = \varphi'(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$ и подставив выражения $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ в данное уравнение, получим тождество:

$$x^2 \frac{2x^3+1}{x^2} - 2x \frac{x^3 - 1}{x} - 3 \equiv 0.$$

При интегрировании уравнения, разрешенного относительно производной, мы далеко не во всех случаях могли найти решение этого уравнения в явной форме. Тем более такие случаи редки для уравнения (1). Чаще всего приходится искать решение уравнения (1) в неявной или в параметрической форме.

Говорят, что уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет решение уравнения (1) *в неявной форме*, если оно задает y как неявную функцию от x и если эта последняя служит решением уравнения (1). Также гово-

рят, что соотношения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определяют решение уравнения (1) *в параметрической форме* в некотором промежутке изменения t, если в этом промежутке выполняется тождество

$$F\left[\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \equiv 0.$$

При отыскании решения уравнения (1) стараются, прежде всего, разрешить это уравнение относительно y'. Предположим, что в некоторой области D нам удалось это сделать, и мы свели уравнение (1) к конечному числу уравнений вида*):

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Все решения этих уравнений являются решениями уравнений (1) в области D, и других решений уравнение (1) не имеет.

Пусть общие интегралы уравнений (2) суть

$$\Phi_k(x, y) = C. \tag{3}$$

Совокупность этих общих интегралов называют *общим интегралом* уравнения (1) в области D.

Иногда вместо равенств (3) пишут равносильное им одно равенство:

$$[\Phi_1(x, y) - C_1][\Phi_2(x, y) - C_2] \ldots [\Phi_m(x, y) - C_m] = 0^{**}).$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'^2 - (3x^2 + 2y)y' + 6x^2y = 0. \tag{4}$$

Оно не разрешено относительно производной. Решая его как квадратное уравнение относительно y', получим два уравнения:

$$y' = 3x^2, \quad y' = 2y. \tag{5}$$

Правые части этих уравнений определены на всей плоскости xOy. Интегрируя каждое из уравнений (5), находим их общие решения:

$$y = x^3 + C, \quad y = Ce^{2x} \quad (-\infty < C < +\infty). \tag{6}$$

Совокупность общих решений (6) дает общий интеграл уравнения (4) на всей плоскости xOy. Его можно записать в виде одного соотношения:

$$(y - x^3 - C)(y - Ce^{2x}) = 0. \tag{7}$$

Решение $y = 0$ включается во второе из равенств (6) (при $C = 0$).

Общий интеграл (7) представляет собой наложение семейств интегральных кривых (6). Через каждую точку (x_0, y_0) плоскости xOy, не лежащую на оси Ox, проходят две интегральные кривые:

$$y = x^3 + y_0 - x_0^3 \text{ и } y = \frac{y_0}{e^{2x_0}} e^{2x}.$$

---

*) В принципе таких уравнений может быть и бесконечное множество.

**) Для каждого из интегралов (3) произвольная постоянная может меняться в своих пределах; если область изменения этих постоянных для всех уравнений (3) одна и та же, то вместо приведенной записи употребляется следующая: $[\Phi_1(x, y) - C][\Phi_2(x, y) - C] \cdot \ldots \cdot [\Phi_m(x, y) - C] = 0$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(y')^4 - 16y^2 = 0 \quad (y > 0). \qquad (8)$$

Разрешая его относительно y' в действительной области, получим:

$$y' = 2\sqrt{y} \text{ и } y' = -2\sqrt{y}. \qquad (9)$$

Решая эти уравнения, находим их общие интегралы в верхней полуплоскости

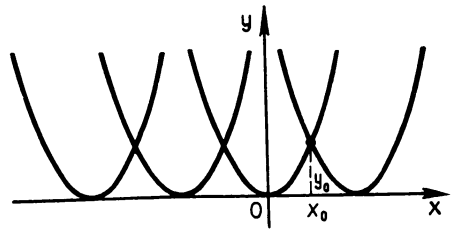


Рис. 112

$$\sqrt{y} = x + C \quad (x + C \geqslant 0), \quad \sqrt{y} = -x + C \quad (-x + C \geqslant 0). \qquad (10)$$

Кроме этого, уравнения (9) имеют еще решение $y = 0$. Совокупность общих интегралов (10) дает общий интеграл данного уравнения (8). Его можно записать и в виде одного соотношения:

$$(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0. \qquad (11)$$

Общий интеграл (11) представляет собой наложение двух семейств интегральных кривых уравнений (9) (рис. 112). Через каждую точку (x_0, y_0) верхней полуплоскости проходят две интегральные кривые (ветви парабол).

И для уравнений, не разрешенных относительно производной, можно говорить об особых решениях этих уравнений. При этом под особым решением уравнения (1) понимают все особые решения уравнений (2). Так, в предыдущем примере функция $y = 0$ является особым решением уравнения (1), так как она является особым решением для уравнений (9).

Однако далеко не всякое дифференциальное уравнение вида (1) удается разрешить относительно производной в конечном виде с помощью элементарных функций. Таковым, например, является уравнение $x = \ln \frac{y'}{y} + y'$. Вместе с этим существуют некоторые типы уравнений вида (1), для которых можно найти общий интеграл, не решая их относительно производной.

§ 94. ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Некоторые типы уравнений вида $F(x, y, y') = 0$ интегрируются с помощью дифференцирования.

1. Уравнения, разрешимые относительно аргумента. Рассмотрим дифференциальное уравнение, которое может быть разрешено относительно аргумента в элементарных функциях, т. е. уравнение вида:

$$x = \varphi(y, y'). \qquad (1)$$

Общий интеграл данного уравнения может быть найден так. Положим, $y' = p$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$x = \varphi(y, p). \qquad (2)$$

Будем предполагать, что функция $\varphi(y, p)$ аргументов y и p дифференцируема. Тогда, дифференцируя (2), найдем:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp. \tag{3}$$

Поскольку $dy = y'dx = p\,dx$, то согласно (3) получаем:

$$dy = p\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp\right).$$

Принимая в этом уравнении y за независимую переменную и деля обе его части на $p\,dy$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dy}, \tag{4}$$

которое разрешимо относительно производной $\frac{dp}{dy}$. Предполагая, что это уравнение интегрируется в квадратурах, находим его общий интеграл в виде:

$$\Phi(y, p, C) = 0. \tag{5}$$

Пусть соотношение (5) определяет неявно p как функцию от y и C*):

$$p = \psi(y, C).$$

Подставляя это значение p в уравнение (2), получим соотношение:

$$x = \varphi[y, \psi(y, C)]. \tag{6}$$

Убедимся, что (6) — общий интеграл уравнения (1). Дифференцируя сложную функцию (6) по y, находим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \psi'_y(y, C). \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) исключим C. Так как $p = \psi(y, C)$ — общее решение уравнения (4) и $\frac{dp}{dy} = \psi'_y(y, C)$, то подстановка в уравнение (4) вместо p функции $\psi(y, C)$ дает тождество:

$$\frac{1}{\psi(y, C)} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \psi'_y(y, C). \tag{8}$$

Из тождественности правых частей равенств (7) и (8) заключаем, что $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\psi(y, C)}$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y, C), \tag{9}$$

*) Нам здесь неважно, существует или нет фактически явное выражение в элементарных функциях для p.

а из уравнений (6) и (9) находим: $x = \varphi(y, y')$. Мы получили данное уравнение (1), откуда и следует, что (6) — общий интеграл уравнения (1)*).

Замечание 1. Если уравнение (5) затруднительно решить относительно p, то общий интеграл уравнения (1) можно представить системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(y, p), \\ \Phi(y, p, C) = 0, \end{cases}$$

где p — параметр.

Пример 1. Решить уравнение $x = \ln \frac{y'}{y}$.

Решение. Данное уравнение разрешено относительно аргумента x. Полагая $y' = p$, найдем $x = \ln \frac{p}{y}$, или

$$x = \ln |p| - \ln |y|, \tag{10}$$

откуда $dx = -\frac{1}{y}dy + \frac{1}{p}dp$. Пользуясь соотношением $dy = y'dx = p\,dx$, получим: $dy = p\left(-\frac{1}{y}dy + \frac{1}{p}dp\right)$, $\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = 1$. Получили линейное неоднородное уравнение относительно p. Общее решение этого уравнения находим по формуле (6) (§ 87):

$$p = e^{\int \frac{dy}{y}}\left[C + \int e^{-\int \frac{dy}{y}} dy\right],$$

или

$$p = |y|\,(C + \ln |y|). \tag{11}$$

Исключив параметр p из соотношений (10) и (11), получим общий интеграл данного уравнения: $x = \ln |C + \ln |y||$, который можно переписать в виде: $e^x = |\ln |y| + C|$.

Иногда уравнение (4) легко интегрируется, если принять за независимую переменную не y, а p. Тогда мы получим общее решение в параметрической форме: $x = \varphi(p, C)$, $y = \psi(p, C)$.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $x = \frac{1 + y'}{1 + y'^3}$.

Решение. Рассматриваемое уравнение является частным случаем уравнения (1). Полагая $y' = p$, найдем: $x = \frac{1 + p}{p^3}$. Отсюда $dx = -\frac{2p + 3}{p^4}dp$. Согласно соотношению $dy = p\,dx$ получаем: $dy = p\left(-\frac{2p + 3}{p^4}\right)dp$, или $dy = \left(-\frac{2}{p^2} - \frac{3}{p^3}\right)dp$. Интегрируя, находим: $y = \frac{2}{p} + \frac{3}{2p^2} + C$.

Составляем общее решение данного уравнения в параметрической форме: $x = \frac{1 + p}{p^3}$, $y = \frac{4p + 3}{2p^2} + C$.

---

*) Мы здесь пользуемся новым (хотя и вполне естественным) определением общего интеграла дифференциального уравнения; доказывается, что оно тождественно приведенному на с. 416, 417.

2. Уравнения, разрешимые относительно неизвестной функции. Рассмотрим дифференциальное уравнение, которое может быть приведено к виду

$$y = \varphi(x, y'), \tag{12}$$

где y' содержится существенно (так что $\frac{d\varphi}{dy'} \neq 0$). Это уравнение также может быть сведено к более простому при помощи дифференцирования. Полагая $y' = p$, имеем:

$$y = \varphi(x, p). \tag{13}$$

Будем предполагать, что функция $\varphi(x, p)$ аргументов x и p дифференцируема. Тогда, дифференцируя (13), найдем:

$$dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp.$$

Заменяя теперь в соотношении $dy = y'dx$ величины dy и y' их значениями, получим дифференциальное уравнение

$$p\,dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp.$$

Принимая в этом уравнении x за независимую переменную и разделив обе его части на dx, получим уравнение:

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

которое легко разрешается относительно производной $\frac{dp}{dx}$. Пусть общий интеграл этого уравнения будет $\Phi(x, p, C) = 0$. Если это уравнение удастся разрешить относительно p, то оно примет вид: $p = \psi(x, C)$. Внося выражение для p в уравнение (13), получим соотношение между x, y и C вида:

$$y = \varphi[x, \psi(x, C)]. \tag{14}$$

Как и в п. 1, убеждаемся, что (14) является общим решением данного уравнения (12).

Пример 3. Решить уравнение $y = y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2}$.

Р е ш е н и е. Положим $y' = p$. Тогда имеем:

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}. \tag{15}$$

Найдем: $dy = (2p - x)\,dp - (p - x)\,dx$. Учитывая, что $dy = y'dx = p\,dx$, получаем $p\,dx = (2p - x)\,dp - (p - x)\,dx$, откуда

$$(2p - x)\frac{dp}{dx} = 2p - x. \tag{16}$$

Предполагая пока $2p - x \neq 0$, имеем уравнение $\frac{dp}{dx} = 1$, откуда

$$p = x + C. \tag{17}$$

Исключив параметр p из уравнений (15) и (17), находим общее решение данного уравнения: $y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2}$. Упростив правую часть последней формулы, получим общее решение в виде: $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

Уравнение $2p - x = 0$ определяет особое решение $p = \frac{x}{2}$ уравнения (16), а соответствующая этому значению p по (15) функция $y = \frac{x^2}{4}$ — особое решение данного уравнения.

3. Уравнение Лагранжа. В пп. 1 и 2 рассматриваемые уравнения приводились методом дифференцирования к уравнению, разрешенному относительно производной, которое, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Здесь мы рассмотрим один вид уравнения, разрешенного относительно неизвестной функции, которое методом дифференцирования сводится к уравнению, интегрируемому в квадратурах, а именно уравнение вида: $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, где $\varphi(y')$ и $\psi(y')$ — данные дифференцируемые функции производной y'. Оно называется *уравнением Лагранжа*. Таким образом, в уравнении Лагранжа переменная y является линейной функцией от x с коэффициентами, зависящими от y'.

Полагая $y' = p$, перепишем данное уравнение в виде:

$$y = \varphi(p)\, x + \psi(p). \tag{18}$$

Так как функции $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ дифференцируемы по p, то $dy = \varphi(p)\, dx + [\varphi'(p)\, x + \psi'(p)]\, dp$. Заменяя в равенстве $dy = p\, dx$ величину dy ее значением, получим уравнение:

$$[p - \varphi(p)]\, dx - [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\, dp = 0. \tag{19}$$

Если в последнем уравнении рассматривать p как независимое переменное, а x — как искомую функцию, то получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} - \varphi'(p)\, x - \psi'(p) = 0. \tag{20}$$

Предполагая, что $p - \varphi(p) \neq 0$*) (т. е., что $\varphi(p)$ не есть просто p), представим уравнение (20) в виде:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\, x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0.$$

Это уравнение линейное. Общее решение такого уравнения, как известно (§ 87), выражается в квадратурах. Пусть это решение есть

$$x = f(p, C). \tag{21}$$

*) Случай, когда $\varphi(p) \equiv p$ будет рассмотрен в следующем пункте.

Подставляя найденное выражение x в уравнение (18), мы выразим через p и C переменную y: $y = f(p, C)\,\varphi(p) + \psi(p)$, т. е.

$$y = F(p, C). \tag{22}$$

Таким образом, переменные x и y выражены (в квадратурах) по формулам (21) и (22) как функции параметра p. Исключив из уравнений (21) и (22) этот параметр (если это возможно), получим соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$, являющееся общим интегралом уравнения Лагранжа. Если такое исключение параметра p невозможно или нежелательно, то, рассматривая уравнения (21) и (22) в совокупности, мы получим интеграл уравнения Лагранжа в параметрической форме.

Замечание 4. Приводя уравнение (19) к виду (20), мы делили первое из них на dp. При этом мы могли потерять решения уравнения (19), для которых $dp = 0$ и, значит, p постоянно. В таком случае уравнение (19) удовлетворяется лишь в том случае, если постоянная величина p является корнем уравнения $\varphi(p) - p = 0$. Пусть для некоторого значения $p = C_0$ мы имеем $\varphi(C_0) - C_0 = 0$. Тогда, подставив это значение $p = C_0$ в уравнение (18), получим решение уравнения Лагранжа в виде $y = \varphi(C_0)\,x + \psi(C_0)$, не вытекающее из общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$. Геометрически эти решения представляют прямые линии.

Пример 4. Решить уравнение $y = y'^2 x + y'^2$.

Решение. Это уравнение Лагранжа. Полагая $y' = p$, перепишем его в виде:

$$y = p^2 x + p^2. \tag{23}$$

В силу соотношения $dy = y'dx = p\,dx$, получаем $p\,dx = p^2\,dx + (2px + 2p)\,dp$, откуда $(p^2 - p)\,dx + 2p(x + 1)\,dp = 0$. Считая, далее, $p \neq \text{const}$ ($dp \neq 0$), делим обе части предыдущего равенства на $(p^2 - p)\,dp$:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p} \quad (p \neq 0,\ p \neq 1).$$

Общий интеграл этого уравнения можно написать, непосредственно применяя формулу (6) § 87:

$$x = e^{-2\int \frac{dp}{p-1}}\left[C_1 + \int \frac{2}{1-p}\, e^{2\int \frac{dp}{1-p}}\, dp\right] = (p-1)^{-2}[C_1 - (p^2 - 2p] =$$

$$= (p-1)^{-2}[C_1 - (p-1)^2 + 1],\quad x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1,\quad (C = C_1 + 1).$$

Вставляя выражение для x в уравнение (23), получим: $y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}$.

Итак, переменные x и y выражены как функции параметра p и произвольного постоянного C, т. е. получено общее решение в параметрической форме. Здесь параметр p можно было бы исключить.

При делении уравнения (19) на dp, как указывалось выше, теряются решения $p = p_k$, где p_k — корни уравнения $\varphi(p) - p = 0$. В данном случае уравнение $p^2 - p = 0$ имеет два корня: $p_1 = 0$ и $p_2 = 1$, которым в си-

лу уравнения (23) соответствуют два решения: $y = 0$ и $y = x + 1$ рассматриваемого уравнения Лагранжа. Первое из них, как мы увидим в дальнейшем, является особым.

4. Уравнение Клеро. При нахождении общего интеграла уравнения Лагранжа мы предполагали, что $\varphi(p) - p \neq 0$. Пусть теперь $\varphi(p) - p \equiv 0$ или $\varphi(y') \equiv y'$. Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{24}$$

Такое уравнение называется *уравнением Клеро**).

Если $\psi(y')$ — линейная функция от y', то уравнение Клеро оказывается уравнением с разделяющимися переменными, которое нами изучено в § 85. Пусть $\psi(y')$ есть дважды дифференцируемая (не линейная) функция от y' и $\psi''(y')$ сохраняет постоянный знак. Для получения общего решения уравнения Клеро в этом случае мы будем поступать так же, как и при интегрировании уравнения Лагранжа. Положим, $y' = p$. Тогда

$$y = px + \psi(p). \tag{25}$$

Следовательно, $dy = x\,dp + p\,dx + \psi'(p)\,dp$, но $dy = p\,dx$, поэтому $p\,dx = x\,dp + p\,dx + \psi'(p)\,dp$, или $[x + \psi'(p)]\,dp = 0$.

Последнее равенство может выполняться лишь в двух случаях: либо тогда, когда $dp = 0$, либо когда $x + \psi'(p) = 0$.

1) Если $dp = 0$, то $p = C$ (const). Подставляя это значение в уравнение (25), получим общее решение уравнения Клеро в виде

$$y = Cx + \psi(C). \tag{26}$$

Сравнивая (24) и (26), мы заключаем, что для получения общего решения уравнения Клеро достаточно в этом уравнении заменить производную y' произвольной постоянной C.

Геометрически общее решение (26), очевидно, представляет семейство прямых линий.

2) Если $x + \psi'(p) = 0$, т. е. если $x = -\psi'(p)$, то мы получим еще одно решение уравнения (24). Действительно, подставив значение $x = -\psi'(p)$ в уравнении (24), мы выразим y как функцию параметра p: $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$. Тогда равенства

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p) \tag{27}$$

определяют y как функцию от x**) и дают решение уравнениям (24) в параметрической форме. В самом

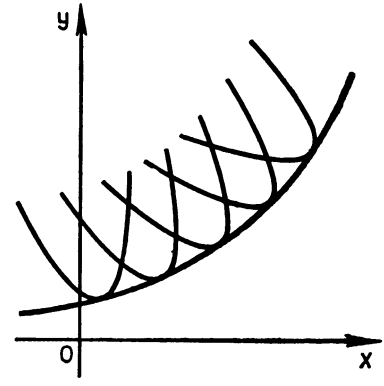


Рис. 113

*) Клеро (1713—1765) — французский математик.

**) Так как $\psi''(p)$ сохраняет постоянный знак, то уравнение $x = -\psi'(p)$ определяет p как неявную функцию от x: $p = F(x)$, так что во втором уравнении из (27) y есть сложная функция от x.

деле, так как по условию функция $\psi(p)$ дважды дифференцируема и $\psi''(p) \not\equiv 0$*), то найдем:

$dx = -\psi''(p)\,dp$, $dy = [-p\psi''(p) - \psi'(p) + \psi'(p)]\,dp = -p\psi''(p)\,dp$,

откуда $\frac{dy}{dx} = p$. Подставляя теперь значения x, y и y' в уравнение Клеро, получаем тождество:

$$-p\psi'(p) + \psi(p) \equiv -p\psi'(p) + \psi(p).$$

Выясним геометрический смысл решения (27). Пусть имеем уравнение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{28}$$

где x и y — переменные декартовы координаты, а C — параметр. При каждом допустимом значении параметра C уравнение (28) определяет некоторую кривую на плоскости xOy. Давая C всевозможные допустимые значения, мы получаем множество кривых, зависящих от одного параметра, или, как обычно говорят, однопараметрическое семейство кривых.

Предположим, что существует такая линия, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства (28), причем имеет касание с каждой кривой этого семейства. Тогда такая линия называется *огибающей* семейства линий (28) (рис. 113).

Легко убедиться, что если соотношение (28) представляет собой семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, то огибающая этого семейства, если она существует, является интегральной кривой этого уравнения. Действительно, в каждой своей точке огибающая имеет общую касательную с какой-либо интегральной кривой семейства (28), и, следовательно, в каждой своей точке огибающая имеет направление касательной, совпадающее в этой точке с направлением поля, задаваемого уравнением $y' = f(x, y)$, а это и доказывает, что огибающая является интегральной кривой.

Так как в каждой точке огибающей нарушается условие единственности решения: через эту точку проходят по крайней мере две интегральные кривые (огибающая и кривая семейства, которой огибающая касается в этой точке), то огибающая является графиком особого решения.

В дифференциальной геометрии доказывается, что при известных предположениях относительно семейства (28) уравнение огибающей этого семейства получается в результате исключения параметра C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y, C) = 0. \tag{29}$$

---

*) Условие $\psi''(p) \not\equiv 0$ можно было бы и не выдвигать, так как выше мы уже предположили, что $\psi(p)$ не является линейной функцией.

Для семейства интегральных кривых (26) эти уравнения имеют вид:

$$y - Cx - \psi(C) = 0, \quad -x - \psi'(C) = 0, \text{ или}$$

$$x = -\psi'(C), \; y = -C\psi'(C) + \psi(C). \tag{30}$$

Но уравнения (30) и (27) отличаются только обозначениями параметра, т. е. кривые (30) и (27) совпадают. Следовательно, можно утверждать, что решение (27) уравнения Клеро имеет графиком огибающую семейства интегральных кривых (26), а потому решение (27) является особым решением уравнения Клеро.

Если из уравнений (27) параметр p удастся исключить, то особое решение уравнения Клеро будет выражаться соотношением вида $F(x, y) = 0$.

Итак, общее решение уравнения Клеро геометрически представляет собой семейство прямых на координатной плоскости, а особое решение — огибающую этого семейства.

Замечание 5. Устанавливается, что уравнения (29) могут определять, кроме огибающей, и другие кривые. Но, если хотя бы одна из производных $\frac{\partial \Phi}{dx}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ отлична от нуля и обе они ограничены в точках, удовлетворяющих уравнениям (30), то эти уравнения определяют только огибающую. В нашем случае $\Phi(x, y, C) = y - Cx - \psi(C)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -C$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1$, т. е. упомянутые условия выполнены.

Заметим также, что если семейство (26) является пучком прямых, то огибающая этого семейства вырождается в точку.

Пример 5. Решить уравнение $y = y'x - \frac{y'^2}{2}$.

Решение. Это уравнение Клеро. Его общее решение получаем, заменяя в нем y' на C: $y = Cx - \frac{C^2}{2}$.

Кроме этого, данное уравнение имеет особое решение, определяемое системой уравнений:

$$\begin{cases} y = Cx - \frac{C^2}{2}, \\ 0 = x - C, \end{cases}$$

где второе уравнение получено из первого дифференцированием его по C. Исключая из этой системы параметр C, получаем: $y = \frac{x^2}{2}$.

Следовательно, особое решение геометрически представляет собой параболу; общее решение — касательные к этой параболе (рис. 114).

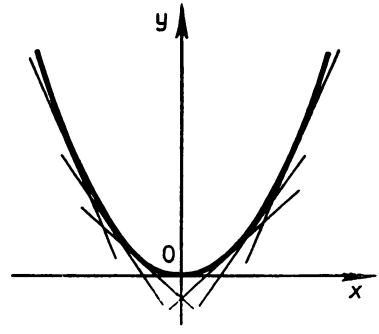


Рис. 114

ГЛАВА XV.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 95. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Как известно (§ 81), дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется уравнением высшего порядка, если $n > 1$. В случае, когда это уравнение разрешено относительно n-й производной, оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Решением дифференциального уравнения (1) (*или* (2)) *на данной области R значений аргумента x называется всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная на R вместе со своими последовательными производными до n-го порядка включительно, которая обращает это уравнение в тождество*:

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0, \quad x \in R$$

(*соответственно для* (2): $\varphi^{(n)}(x) \equiv f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)]$).

И здесь, как и в случае $n = 1$, вводится понятие общего и частного решения уравнения (1) (соответственно (2)).

Если предварительно определить (нестрого) общее решение дифференциального уравнения (2) как функцию от x и некоторых параметров $C_1, C_2, \ldots$, которая выражает (при различных значениях этих параметров) все решения данного уравнения n-го порядка, то естественно ожидать, что такое общее решение должно содержать в качестве параметров и м е н н о n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$: ведь, находя, например, по второй производной y'' искомой функции $y = \varphi(x)$ саму эту функцию, мы должны будем выполнить последовательно два интегрирования, которые введут именно две произвольные постоянные: $y' = \int y''\,dx + C_1$, $y = \int y'dx + C_1x + C_2$.

Всякое конкретное решение уравнения (2), получающееся из общего при определенных значениях произвольных постоянных, как и в § 81, также называют *частным решением этого уравнения.* При этом также вводят понятие частного решения, определенного н а ч а л ь н ы м и у с л о в и я м и, которые здесь берут обыч-

но так, чтобы они указывали значения искомой функции и ее $(n-1)$ производных при заданном значении аргумента: при $x = x_0$

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

(начальные условия Коши). Задача разыскания такого решения носит название задачи Коши.

Как и в § 90, здесь имеет место теорема существования и единственности решения (теорема Коши):

если функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна в замкнутой ограниченной области* R, *содержащей (внутреннюю) точку* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, *и имеет в* R *по аргументам* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *ограниченные частные производные (ср. с. 414), то в некоторой окрестности точки* x_0 *дифференциальное уравнение (2) имеет единственное решение* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям (3).*

Пусть для дифференциального уравнения (2) в каждой внутренней точке $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ данной замкнутой ограниченной области R выполняются условия теоремы Коши. Дадим тогда следующее определение общего решения уравнения (2).

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения (2) в области* R *называется функция* $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, *определенная (как функция от* $(n+1)$ *переменных* $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$*) в некоторой* $(n+1)$*-мерной области* D, *имеющая в* D *производные по* x *до* n*-го порядка включительно, и такая что*

1) *для любой внутренней точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in R$ *существует такой набор значений* $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ *произвольных постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *что точка* $(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) \in D$*) *и выполняются тождества*:

$$\varphi(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) = y_0,$$
$$\varphi'(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) = y_0',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) = y_0^{(n-1)};$$

2) *при любом таком наборе* $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ *произвольных постоянных функция* $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ *(хотя бы) в некоторой окрестности точки* x_0 *является решением для (2).*

Всякое решение, получающееся из общего при некоторой системе значений $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ произвольных постоянных, в условиях Коши, называется *частным решением* для (2).

Так, для уравнения $y'' = 12x^2 + 6x$, как легко проверить, функция $y = x^4 + x^3 + C_1 x + C_2$ является общим решением. Частные решения этого уравнения получим, давая C_1 и C_2 любые

---

*) При этом, очевидно, требуется, чтобы множество X значений аргумента x, при которых точка $(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \in D$ включало бы в себя то множество X_0 значений x, при которых $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in R - \Gamma$ (Γ — граница замкнутой области R).

фиксированные значения; например, при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ находим частное решение $y = x^4 + x^3 + x$.

Иногда общее решение для (2) задается в неявной форме, т. е. определяется (в некоторой области D_1) соотношением вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

как неявная функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, удовлетворяющая приведенному выше определению. Тогда, как и в § 81, соотношение $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ называется *общим интегралом уравнения* (2), а всякое конкретное соотношение вида $\Phi(x, y, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) = 0$ — *частным* его *интегралом*.

Что касается уравнения (1), то в случае, когда его удается разрешить (в элементарных функциях) относительно $y^{(n)}$, т. е. свести к совокупности (конечной или бесконечной) уравнений вида (2), *общим решением* (*общим интегралом*) *для* (1) *условимся называть множество всех общих решений* (*всех общих интегралов*) *соответствующих ему уравнений вида* (2).

Для (2) (для (1)) вводится и понятие *особого решения*; так, *решение* $y = \psi(x)$ *дифференциального уравнения* (2) *на промежутке* L *называется особым, если в каждой точке* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in R$, *где* $y_0 = \psi(x_0)$, $y_0^{(k)} = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *нарушается условие единственности решения задачи Коши.*

Здесь также (ср. с. 420) могут быть и отдельные решения, не являющиеся ни частными, ни особыми. Задача нахождения общего решения (общего интеграла) уравнения (1) или (2) еще более сложна, чем в случае $n = 1$. Здесь мы ограничимся лишь рассмотрением отдельных типов дифференциальных уравнений n-го порядка.

§ 98. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИДА $y^{(n)} = f(x)$

Это уравнение легко решается путем проведения нескольких последовательных интегрирований. Положим, что функция $f(x)$ непрерывна на некотором рассматриваемом промежутке, тогда, так как $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, мы можем найти $y^{(n-1)}$ интегрированием: $y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1$, где x_0 — любая точка данного промежутка. Точно так же последовательно находим:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left[\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1 \right] dx = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \frac{C_1(x-x_0)^2}{2} + C_2(x - x_0) + C_3$$

и т. д.; на n-м шаге получим общее решение для данного дифференциального уравнения:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\,dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots +$$

$$+ C_{n-1}(x-x_0) + C_n. \qquad (1)$$

Общее решение, записанное в форме (1), позволяет удобно находить частное решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$ по заданным начальным условиям: последовательно полагая в полученных выше равенствах для $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ..., y аргумент x, равным x_0, мы найдем (учитывая, что $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ и все последующие интегралы обращаются в нуль при $x = x_0$): $C_1 = y_0^{(n-1)}$, $C_2 = y_0^{(n-2)}$, ..., $C_n = y_0$, и соотношение (1) обращается в равенство (частное решение):

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} +$$

$$+ \ldots + \frac{y_0'}{1!}(x-x_0) + y_0. \qquad (1')$$

Так как $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ одна из первообразных для $f(x)$ (обращающаяся при $x = x_0$ в нуль), то, если не требуется выделять из общего решения какое-либо конкретное решение, удобно в (1) вместо $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ писать просто $\int f(x)\,dx$, и тогда запись общего решения можно дать в такой форме:

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y^{(n)} = xe^x$.

Р е ш е н и е. Последовательно находим: $y^{(n-1)} = \int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C_1$, $y^{(n-2)} = (x-2)e^x + C_1 x + C_2$, ..., и $y = (x-n)e^x + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$ — общее решение данного уравнения.

У р а в н е н и е б о л е е о б щ е г о в и д а $F(x, y^{(n)}) = 0$ может быть приведено к предыдущему, если его удастся разрешить относительно $y^{(n)}$ в элементарных функциях. Но часто это бывает невозможно. В таком случае иногда приходит на помощь метод параметризации: если уравнение $F(x, y^{(n)}) = 0$ допускает параметризацию и с помощью некоторого параметра t может быть приведено к системе вида $x = \alpha(t)$, $y^{(n)} = \beta(t)$, то, поскольку $y^{(n)} = (y^{(n-1)})_t' : \frac{dx}{dt}$ и $(y^{(n-1)})_t' = y^{(n)}\frac{dx}{dt} = \beta(t) \cdot \alpha'(t)$, будем

иметь: $y^{(n-1)} = \int \beta(t)\alpha'(t)\,dt$, откуда в свою очередь $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}\,dx = \left\{\int \alpha'(t) \int \beta(t)\alpha'(t)\,dt\right\} dt$ и т. д. На n-м шаге мы придем к параметрическому выражению для y: $y = \gamma(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которое вместе с равенством $x = \alpha(t)$ и составит параметрическое задание общего интеграла рассматриваемого уравнения.

§ 97. НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

В некоторых случаях общее дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

допускает понижение порядка, т. е. может быть приведено (например, с помощью некоторой замены переменного) к решению нового дифференциального уравнения более низкого порядка:

$$\Phi_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0 \quad (1 \leqslant k < n). \qquad (2)$$

Так как в некоторых простейших случаях уравнение (2) может быть получено из (1) путем k последовательных его интегрирований, то уравнение (2) часто называют *k-м промежуточным интегралом* для (1). Если уравнение (2) в свою очередь удастся проинтегрировать, то при этом будет введено еще $(n - k)$ произвольных постоянных: $C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n$, и мы получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения (1).

Рассмотрим несколько простейших видов дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнения, не содержащие явно неизвестной функции. Такое уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leqslant k < n). \qquad (3)$$

Делая замену переменного $y^{(k)} = z$, найдем: $y^{(k+1)} = z'$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, и уравнение (3) примет вид:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет порядок, на k единиц меньший, чем (3) и, возможно, его легче будет интегрировать, чем (3). Если мы сумеем найти общий интеграл для (4)

$$\Phi_{n-k}(x, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0, \qquad (5)$$

то мы получим относительно $y^{(k)}$ $(z = y^{(k)})$ дифференциальное уравнение k-го порядка — $(n - k)$-й промежуточный интеграл уравнения (3). Если уравнение (5) удастся решить, то его общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ будет общим интегралом и для уравнения (3).

Пример 1. Решить уравнение $2xy'y'' = y'^2 - 4$.

Р е ш е н и е. Обозначим $y' = z$, тогда $y'' = z'$, и уравнение принимает вид: $2xzz' = z^2 - 4$. Это уравнение первого порядка. При $z \neq \pm 2$ находим, разделяя переменные и интегрируя:

$$\ln|z^2 - 4| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0).$$

Отсюда $\ln|z^2-4| = \ln|C_1x|$, $z^2-4 = C_1x$*). Но $z = y' = \frac{dy}{dx}$, поэтому имеем: $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4+C_1x}$ и

$$y = \pm\int\sqrt{4+C_1x}\,dx = \pm\frac{2}{3C_1}(4+C_1x)^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

Если $z = \pm 2$, то $z' = 0$ и исходное уравнение с z удовлетворяется, имея два отдельных решения. Этому соответствует два отдельных решения и для исходного дифференциального уравнения: $y = \pm 2x + C$.

Частным случаем уравнения (3) является *уравнение вида*

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0 \quad (n \geqslant 2).$$

Здесь замена переменного $y^{(n-1)} = z$ заведомо приводит к уравнению первого порядка: $F(z, z') = 0$. Если для этого уравнения удастся найти (в элементарных функциях) общий интеграл $\Phi(x, z, C_1) = 0$, то мы получим относительно y дифференциальное уравнение вида $\Phi(x, y^{(n-1)}, C_1) = 0$, рассмотренного в § 96.

Задача 1. Подводная лодка массы m без начальной скорости медленно погружается в воду, причем известно, что при таком погружении сила сопротивления воды пропорциональна скорости погружения (коэффициент пропорциональности равен k). Найти путь, пройденный лодкой за время t.

Р е ш е н и е. Если s — путь, пройденный лодкой к моменту времени t, то скорость v в этот момент есть производная $\frac{ds}{dt}$ и сила, действующая на лодку, равна разности веса mg лодки и силы сопротивления $k\frac{ds}{dt}$: $|\vec{f}| = mg - k\frac{ds}{dt}$. С другой стороны, по второму закону Ньютона $|\vec{f}| = m\frac{d^2s}{dt^2}$, и мы имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt}.$$

Это уравнение только что рассмотренного вида относительно функции s (здесь $n = 2$). Обозначая $\frac{ds}{dt}$ через v и переходя к функции v, мы понизим порядок уравнения до первого:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Полученное уравнение легко привести к однородному заменой: $v - \frac{mg}{k} = z$. При этом окажется: $m\frac{dz}{dt} = -kz$, откуда $z = C_1e^{-\frac{k}{m}t}$, и $v = \frac{mg}{k} + C_1e^{-\frac{k}{m}t}$. Так

*) Собственно, $z^2 - 4 = \pm C_1x$. Но C_1 принимает все отличные от нуля действительные значения, и двойной знак перед C_1 поэтому излишен.

как по условию при $t=0$ имеем $v=0$, то из этого равенства находим: $C_1=-\frac{mg}{k}$, и

$$\frac{ds}{dt}=v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \qquad (*)$$

Отсюда, интегрируя, получим: $s=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)+C_2$. Но при $t=0$ $s=0$, следовательно, $C_2=-\frac{mg}{k}\frac{m}{k}$, и мы окончательно получаем:

$$s=\frac{mg}{k}\left[t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right].$$

Заметим, что при большом промежутке времени t выражение $e^{-\frac{k}{m}t}$ будет мало и мы можем для таких t скорость v погружения лодки считать практически постоянной и приблизительно равной $\frac{mg}{k}$ (см. (*)).

Частным случаем уравнения (3) является также уравнение вида $F(y^{(n)}, y^{(n-2)})=0$. Рассмотрим здесь только тот случай, когда это уравнение разрешимо относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f(y^{(n-2)}). \qquad (6)$$

Если $f(z)$ — интегрируемая функция, то уравнение (6) легко интегрируется в квадратурах: положив $y^{(n-2)}=z$, приведем уравнение (6) к виду:

$$z''=f(z).$$

Воспользуемся для его решения следующим приемом: умножим обе части этого уравнения на $2z'$; тогда $2z'z''=2z'f(z)$*). Полученное уравнение представим в дифференциальной форме: $d(z'^2)=2f(z)\,dz$, откуда, интегрируя, находим:

$$z'^2=\int 2f(z)\,dz+C_1.$$

Из полученного уравнения выражаем $\frac{dz}{dx}=z'$; разделяем затем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx}=z'=\pm\sqrt{\int 2f(z)\,dz+C_1},\quad dx=\pm\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\,dz+C_1}},$$

$$x+C_2=\pm\int\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\,dz+C_1}}.$$

*) При этом могут появиться посторонние решения вида $z=C$.

Выполнив здесь интегрирование и заменив затем z через $y^{(n-2)}$, мы придем к уравнению типа: $\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0$, описанному в § 96. Решая его, мы и найдем общий интеграл для (6).

Пример 2. Решить уравнение: $y'''(y')^3 = -1$.

Решение. Имеем уравнение типа (6). Заменяя y' через z, получим: $z''z^3 = -1$, $z'' = \dfrac{1}{z^3}$. Далее применяем описанный выше прием: $2z'z''dx = -\dfrac{2}{z^3}z'dx$, $d(z'^2) = -\dfrac{2}{z^3}dz$, $z'^2 = \dfrac{1}{z^2} + C$.

Дальнейший ход решения существенно зависит от того, какой знак имеет C*). Пусть сначала $C > 0$. Полагая $C = \dfrac{1}{C_1^2}$, найдем:

$$z'^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{C_1^2}, \quad z'^2 = \frac{C_1^2 + z^2}{C_1^2 z^2}, \quad z' = \pm\frac{\sqrt{z^2 + C_1^2}}{C_1 z}.$$

Так как C_1 может быть здесь любым, отличным от нуля числом, то двойной знак перед дробью здесь можно опустить. Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя, получим:

$$x + C_2 = \int \frac{C_1 z\,dz}{\sqrt{z^2 + C_1^2}} = C_1\sqrt{z^2 + C_1^2}, \quad z^2 = \frac{(x + C_2)^2}{C_1^2} - C_1^2;$$

$$y' = z = \frac{\sqrt{(x + C_2)^2 - C_1^4}}{C_1},$$

$$y = \frac{1}{C_1}\int\sqrt{(x + C_2)^2 - C_1^4}\,dx = \frac{1}{C_1}\left[\frac{x + C_2}{2}\sqrt{(x + C_2)^2 - C_1^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_1^4}{2}\ln\left|x + C_2 + \sqrt{(x + C_2)^2 - C_1^4}\right|\right] + C_3,$$

где $\dfrac{x + C_2}{C_1}$ берется не меньше, чем $|C_1|$.

Пусть теперь $C < 0$. Полагая $C = -\dfrac{1}{C_1^2}$, найдем $z' = \dfrac{\sqrt{C_1^2 - z^2}}{C_1 z}$, откуда, поступая аналогично предыдущему, получим:

$$y = \frac{1}{C_1}\left[\frac{x + C_1}{2}\sqrt{C_1^4 - (x + C_2)^2} + \frac{C_1^4}{2}\arcsin\frac{x + C_2}{C_1^2}\right] + C_3,$$

где $\dfrac{x + C_2}{-C_1}$ берется при условии: $0 \leqslant \dfrac{x + C_2}{-C_1} \leqslant |C_1|$.

2. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимого переменного. Такие уравнения имеют вид:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7}$$

*) Случай $C = 0$ приводит к отдельному решению.

В этом случае понижение порядка достигается переходом к новому аргументу y и к новой функции (от y) $p = \frac{dy}{dx}$. Находим последовательно, выражая y'', y''', ... через функцию p и ее производные:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right].$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что и вообще производная $y^{(k)}$ выражается в виде многочлена от p, $\frac{dp}{dy}$, ..., $\frac{d^{(k-1)}p}{dy^{(k-1)}}$ ($k = 2, 3, \ldots, n$). Подставляя эти выражения для производных $y^{(k)}$ в (7), мы получим уравнение вида:

$$F_1\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}}\right) = 0,$$

имеющее уже порядок на единицу меньший чем (7). Если для этого уравнения удается найти общий интеграл $\Phi(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0$, то дальнейшее решение сведется к интегрированию уравнения первого порядка (при этом могут быть потеряны отдельные решения вида $y = C$).

Пример 3. Решить уравнение $y'''(1 + y'^2) = 3y'(y'')^2$.

Р е ш е н и е. Вначале рассмотрим это уравнение как уравнение, не содержащее неизвестной функции. Полагая $y' = z$, приведем уравнение к виду $z''(1 + z^2) = 3zz'^2$. Теперь рассмотрим получившееся уравнение как уравнение, не содержащее независимого переменного x. Обозначая z' через p и вычисляя $z'' = p\frac{dp}{dz}$, найдем после подстановки в предыдущее уравнение: $p\frac{dp}{dz}(1 + z^2) = 3zp^2$. Сокращая на p (случай $p = 0$ приводит к отдельному решению $y = C$), разделяя переменные и затем интегрируя, получим (см. сноску с. 380):

$$\ln p = \frac{3}{2}\ln(1 + z^2) - \ln C_1,$$

или $C_1 p = (1+z^2)^{\frac{3}{2}}$, т. е. $C_1\frac{dz}{dx} = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$, откуда $dx = -\frac{C_1\,dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, и

$$x - C_2 = \int \frac{C_1\,dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C_1 z}{\sqrt{1+z^2}} \qquad (8)$$

— вспомогательное уравнение с z решено.

Далее мы могли бы отсюда выразить $z = y'$ через x и затем найти общее решение y. Проще, однако, здесь поступить иначе: рассматривая z как параметр, получить сначала параметрическое выражение для общего интеграла,

а затем, исключив z, получить и обычное его выражение. Так как $dy = z\,dx$, то (см. выше выражение для dx)

$$y - C_3 = \int z\,dx = \int \frac{C_1 z\,dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{C_1}{\sqrt{1+z^2}}. \qquad (9)$$

С помощью (8) и (9) находим: $(x - C_2)^2 + (y - C_3)^2 = C_1^2$ — общий интеграл рассматриваемого уравнения (семейство окружностей).

Задача 2. Однородная цепь, висящая на крюке так, что свисающие ее концы имеют длину $a = 8$ *см* и $b = 6$ *м*, начинает под действием силы тяжести соскальзывать (без трения) с крюка. Во сколько времени соскользнет цепь?

Р е ш е н и е. Обозначим массу 1 *м* цепи через m_0, тогда массы свисающих концов равны am_0 и bm_0, а всей цепи — $(a + b)m_0$. В момент времени t (считая от начала движения), когда уже соскользнул участок цепи длиной s, длины свисающих кусков будут: $a + s$ и $b - s$, а веса их $(a + s)\,m_0g$ и $(b - s)\,m_0g$ $(a > b)$. Так как сила, действующая на движущуюся цепь, равна разности весов этих кусков: $|\vec{f}| = (a + s)\,m_0g - (b - s)\,m_0g$, то, пользуясь вторым законом Ньютона, мы можем составить следующее дифференциальное уравнение:

$$(a + b)m_0 \frac{d^2s}{dt^2} = (a + s)\,m_0g - (b - s)\,m_0g,$$

или $(a + b)\dfrac{d^2s}{dt^2} = 2sg + (a - b)\,g$. Обозначим для краткости $\dfrac{2g}{a+b} = \mu^2$, $\dfrac{(a-b)\,g}{a+b} = \lambda$, тогда будем иметь:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \mu^2 s + \lambda.$$

Пусть $\dfrac{ds}{dt} = v$, тогда $\dfrac{d^2s}{dt^2} = v \cdot \dfrac{dv}{ds}$, и мы приходим к уравнению $v\dfrac{dv}{ds} = \mu^2 s + \lambda$ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получим соотношение:

$$\frac{\mu^2 s^2}{2} + \lambda s = \frac{v^2}{2} + C,$$

где v — скорость движения. Так как при $t = 0$ $s = 0$ и $v = 0$, то и $C = 0$, и мы будем иметь: $v^2 = \mu^2 s^2 + 2\lambda s$, $v = \sqrt{\mu^2 s^2 + 2\lambda s}$, т. е.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\mu^2 s^2 + 2\lambda s} = \sqrt{\left(\mu s + \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}},$$

откуда

$$t + C_1 = \int \frac{ds}{\sqrt{\left(\mu s + \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}}} = \frac{1}{\mu} \ln\left(\mu s + \frac{\lambda}{\mu} + \sqrt{\mu^2 s^2 + 2\lambda s}\right).$$

Так как при $t = 0$ и $s = 0$, то C_1 отсюда определяется следующим образом: $C_1 = \dfrac{1}{\mu} \ln \dfrac{\lambda}{\mu}$, и потому

$$t = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\mu^2 s + \lambda + \mu\sqrt{\mu^2 s^2 + 2\lambda s}}{\lambda}.$$

Искомое время t соскальзывания цепи получим при $s = b$ — длине меньшего участка цепи (учитывая, что $\mu^2 = \frac{2g}{a+b}$; $\lambda = \frac{(a-b)g}{a+b}$):

$$t = \sqrt{\frac{a+b}{2g}} \ln \left[\frac{\frac{2gb}{a+b} + \frac{a-b}{a+b} g + \sqrt{\frac{4g^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{4g^2(a-b)^2}{(a+b)^2}}}{(a-b)\, b} (a+b) \right],$$

или после упрощения

$$t = \sqrt{\frac{a+b}{2g}} \ln \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}.$$

При $a = 8$ (*м*) и $b = 6$ (*м*), в частности, найдем: $t = \sqrt{\frac{7}{g}} \ln (7+4\sqrt{3}) \approx$ $\approx 2{,}3$ (*сек*).

3. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных. Левая часть такого дифференциального уравнения $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ — функция, однородная относительно y, y', ..., $y^{(n)}$, т. е.

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \qquad (10)$$

(m — некоторое действительное число). Подстановкой $z = \frac{y'}{y}$ *) мы понизим его порядок на единицу. Действительно, тогда $y' = yz$, $y'' = y'z + z'y = z^2y + z'y = y(z^2 + z')$, $y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$

и, вообще, как легко доказать методом математической индукции,

$$y^{(k)} = yP_k(z, z', \ldots, z^{(k-1)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (11)$$

где P_k — многочлен k-й степени по z. Отсюда, полагая в (10) $t = \frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$, мы, пользуясь равенством (11), придем к соотношению:

$$F[x, 1, P_1(z), P_2(z, z'), \ldots, P_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})] = \frac{1}{y^m} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

и рассматриваемое уравнение может быть представлено в виде:

$$F[x, 1, P_1(z), P_2(z, z'), \ldots, P_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})] = 0,$$

т. е. в виде уравнения $(n-1)$-го порядка относительно неизвестной функции z. Если это уравнение удастся проинтегрировать, то, пользуясь соотношением $y' = yz$, мы затем найдем и общий интеграл первоначального уравнения.

---

*) Не рассматривая случая $y = 0$, мы могли бы потерять решение $y = 0$, если оно есть, но, на самом деле, интегрируя уравнение $y' = zy$, мы уже включаем снова этот случай: оно удовлетворяется при $y = 0$.

Пример 4. Решить однородное уравнение $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

Решение. Полагая $\frac{y'}{y} = z$, получим уравнение $xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0$, откуда, сокращая на y^2 и преобразуя результат, придем к уравнению: $z' - \frac{z}{x} = -2z^2$ — уравнение Бернулли. Делая замену переменного $z = u^{-1}$, приведем его к линейному уравнению: $-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{xu} = -\frac{2}{u^2}$ или $u' - \frac{1}{x}u = 2$. Делая снова замену: $u = t + x$, мы приведем его к однородному уравнению $t' + \frac{t}{x} = 0$, которое легко проинтегрируем: $t = \frac{C_1}{x}$. Далее последовательно найдем: $u = \frac{C_1}{x} + x = \frac{C_1 + x^2}{x}$, $z = \frac{x}{C_1 + x^2}$ и $y' = \frac{xy}{C_1 + x^2}$. Отсюда получим искомое общее решение: $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{C_1 + x^2}$, $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|C_1 + x^2| + \ln|C_2|$,

$$y = C_2\sqrt{C_1 + x^2}$$

(решение $y = 0$ содержится здесь при дополнительном значении $C_2 = 0$).

В некоторых случаях можно решить дифференциальное уравнение понижением его порядка иными искусственными приемами.

Пример 5. Решить уравнение $x^2y''' - xy'' - 3y' - 3 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в следующем виде:

$$(2xy'' + x^2y''') - 3(xy'' + y' + 1) = 0.$$

Замечая, что $(xy'' + y' + 1)' = xy''' + 2y''$, положим $xy'' + y' + 1 = z$, тогда данное уравнение можно переписать так: $xz' - 3z = 0$.

Последнее уравнение — с разделяющимися переменными; интегрируя его, получим $z = C_1x^3$, и дело сводится к решению уравнения $xy'' + y' + 1 = C_1x^3$. Полагая $y' = p$, мы сведем его к линейному уравнению $xp' + p + 1 = C_1x^3$, общее решение которого легко находится обычным методом: $p = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} - 1$, или $y' = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} - 1$, откуда и находим искомое общее решение: $y = C_1x^4 + C_2\ln|x| - x + C_3$.

§ 98. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

Среди дифференциальных уравнений n-го порядка выделяются своей прикладной значимостью линейные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если его левая часть линейна относительно неизвестной функции и ее последовательных производных. Его общий вид:

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = B(x).$$

Полагая, что $A_0(x) \neq 0$ и деля обе части уравнения на $A_0(x)$, мы получим уравнение следующего вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения — функции $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а также функция $f(x)$ являются непрерывными функциями от x в некотором интервале (α, β). Тогда, как легко видеть, все условия теоремы существования и единственности ре-

шения дифференциального уравнения n-го порядка выполняются в любой замкнутой ограниченной области, содержащей определяемую начальными условиями точку $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ (считая при этом, что все значения x в этой области принадлежат данному интервалу (α, β)). Поэтому в некоторой окрестности δ точки x_0 ($\delta \subset (\alpha, \beta)$) существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется *однородным*; если же $f(x) \not\equiv 0$ в (α, β), то это уравнение называется *неоднородным*.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Такое уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (1')$$

Установим некоторые свойства решений этого уравнения.

Теорема 1. *Если уравнение* (1') *имеет частное решение* $y_1 = y_1(x)$, *то оно имеет и решение* $y = Cy_1$, *каким бы ни было постоянное* C.

Доказательство. Обозначим левую часть уравнения (1') через $L(y)$, а значение ее при какой-либо функции $y = y_1(x)$ — через $L(y_1)$. Так как $\frac{d^k(Cy_1)}{dx^k} = C\frac{d^k(y_1)}{dx^k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $L(y) = L(Cy_1) = CL(y_1)$, где $L(y_1) = y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_1$. Но y_1 — решение для (1'), следовательно, $L(y_1) = 0$ на (α, β), а тогда и $L(Cy_1) = CL(y_1) \equiv 0$ для этих x, т. е. функция $y = Cy_1$ также решение для (1').

Теорема 2. *Если* $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ — *два каких-либо частных решения для уравнения* (1'), *то* $y = y_1 + y_2$ *есть также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как $\frac{d^k(y_1 + y_2)}{dx^k} = \frac{d^k y_1}{dx^k} + \frac{d^k y_2}{dx^k}$, то

$$L(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + a_1(x)(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \ldots +$$

$$+ a_n(x)(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_1) +$$

$$+ (y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv 0 + 0 = 0,$$

т. е. функция $y = y_1 + y_2$, действительно, является решением для (1').

Теорема верна и для нескольких слагаемых.

Следствие. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — *какие-либо частные решения для уравнения* (1'), *то и их любая линейная комбинация* $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$ *является решением этого уравнения.*

Действительно, по теореме 1 слагаемые C_iy_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — решения для (1'), а тогда по теореме 2 и их сумма есть решение этого уравнения.

При $k = n$ эта линейная комбинация будет содержать n произвольных постоянных и при некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на частные решения y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, будет общим решением для (1′). Чтобы выяснить, каковы эти ограничения, введем понятие линейной зависимости и независимости функций.

Определение 1. *Функции* $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_k = \varphi_k(x)$, *определенные на одном и том же множестве* D *значений* x, *называются линейно зависимыми на* D, *если существует такой набор постоянных* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *из которых хотя бы одно отлично от нуля* (такой набор постоянных будем называть в дальнейшем *ненулевым*), *что имеет место тождество*:

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_k\varphi_k(x) \equiv 0 \quad (x \in D). \tag{2}$$

Определение 2. *Если для данной системы функций* $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *указанного в определении 1 ненулевого набора чисел* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *не существует, то функции* $\varphi_i(x)$ $(x \in D)$ *называются линейно независимыми.*

Линейная независимость функций $\varphi_i(x)$, таким образом, означает, что для них тождество (2) будет выполняться на D т о л ь к о для случая, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Так, функции $\varphi_1(x) = \sin^2 x$, $\varphi_2(x) = 2 + 5\cos 2x$, $\varphi_3(x) = 3 - \cos 2x$ линейно зависимы на $(-\infty, +\infty)$. Взяв $\lambda_1 = 34$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = -7$, получим: $\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) = 34\sin^2 x + 2(2 + 5\cos 2x) + (-7)(3 - \cos 2x) = 34\sin^2 x - 17(1 - \cos 2x) \equiv 0$.

Функции же e^x и xe^x на $(-\infty, +\infty)$ линейно независимы: если при некоторых постоянных λ_1 и λ_2 будем иметь: $\lambda_1 e^x + \lambda_2 xe^x \equiv 0$, то, в частности, при $x = 0$ получится, что $\lambda_1 = 0$, а тогда из равенства $\lambda_2 xe^x \equiv 0$ при $x = 1$ вытекает, что и $\lambda_2 = 0$.

Если функции $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеют в интервале (α, β) последовательные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, то можно дать следующее *необходимое условие* их *зависимости.*

Теорема 3. *Для того чтобы функции* $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *были линейно зависимы на данном интервале* (α, β), *необходимо, чтобы в этом интервале определитель*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был тождественно равен нулю.

Этот определитель называется *определителем Вронского* или *вронскианом* системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и обозначается через $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Доказательство. Пусть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на интервале (α, β). Тогда существует такой ненулевой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что для всех $x \in (\alpha, \beta)$ имеет место тождество:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n \equiv 0. \tag{3}$$

Функция $\varphi(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n$ имеет по условию теоремы производные до $(n-1)$-го порядка включительно, причем $\varphi^{(k)}(x) = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)} + \ldots + \lambda_n y_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. С другой стороны, по (3), $\varphi(x) \equiv 0$ на (α, β), и потому $\varphi^{(k)}(x) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ для этих x. Таким образом, вместе с тождеством (3) имеем еще $(n-1)$ тождеств: $\lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)} + \ldots + \lambda_n y_n^k \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, где хотя бы одно из чисел λ_i отлично от нуля. Все эти тождества в совокупности показывают, что в определителе W столбцы линейно зависимы, а такой определитель, как известно из алгебры, равен нулю: $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ (каково бы ни было $x \in (\alpha, \beta)$).

Следствие. *Если для данных функций $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имеющих на (α, β) последовательные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, определитель W хотя бы в одной точке этого интервала отличен от нуля, то эти функции на взятом интервале линейно независимы.*

Таким образом, необходимое условие линейной зависимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, имеющих соответствующие производные, состоит в тождественном равенстве нулю на рассматриваемом интервале их вронскиана.

В общем случае доказанное условие для линейной зависимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не является достаточным, однако если эти функции являются решениями уравнения (1′), то оно будет и достаточным. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если вронскиан W частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дифференциального уравнения (1′) хотя бы в одной точке x интервала (α, β), в котором коэффициенты уравнения (1′) непрерывны, обращается в нуль, то эти функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы в интервале (α, β).*

Доказательство. Обозначим значения функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в точке x соответственно через $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$, а значения их производных $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}$ в этой точке через $\bar{y}_1^{(k)}, \bar{y}_2^{(k)}, \ldots, \bar{y}_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и составим систему n линейных уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ вида:

$$\begin{cases} C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 + \ldots + C_n\bar{y}_n = 0, \\ C_1\bar{y}_1' + C_2\bar{y}_2' + \ldots + C_n\bar{y}_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1\bar{y}_1^{(n-1)} + C_2\bar{y}_2^{(n-1)} + \ldots + C_n\bar{y}_n^{(n-1)} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Так как главный определитель этой системы есть значение $W(\bar{x})$ вронскиана данных частных решений, то он по условию равен нулю, и, значит, однородная линейная система (4) имеет ненулевые решения. Пусть $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ — одно из них. Составим функцию:

$$\bar{y} = \bar{\varphi}(x) = \bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2 + \ldots + \bar{C}_n y_n. \qquad (5)$$

Поскольку $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — решения уравнения (1′), то по следствию (с. 446) и $\bar{y}$ — его решение, причем в силу того, что $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ — решение системы (4), будут иметь место тождества: $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x}) = 0$, $\bar{y}' = \bar{\varphi}'(\bar{x}) = 0$, $\ldots$, $\bar{y}^{(n-1)} = \bar{\varphi}^{(n-1)}(\bar{x}) = 0$, (6) т. е. решение (5) удовлетворяет начальным условиям (6). По теореме существования и единственности решения эти условия определяют единственное решение для дифференциального уравнения (1′). Но непосредственно ясно, что таким решением для (1′) является функция $y = 0$, откуда в силу единственности решения (с указанными начальными условиями) решение (5) совпадает с решением $y = 0$, а потому имеет место тождество (на (α, β)): $\bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2 + \ldots + \bar{C}_n y_n \equiv 0$, где хотя бы одно из чисел $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ отлично от нуля, т. е. функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на (α, β).

Следствие 1. *Если частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (1′) линейно независимы, то их вронскиан не обращается в нуль ни в одной точке из (α, β).*

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы 4.

Следствие 2. *Если вронскиан частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (1′) хотя бы в одной точке из (α, β), где (α, β) — интервал, в котором непрерывны коэффициенты уравнения (1′), равен нулю (отличен от нуля), то он равен нулю (отличен от нуля) и в любой точке этого интервала.*

В самом деле, если $W(\bar{x}) = 0$, то по доказанному функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на (α, β), а тогда по теореме 3 их вронскиан равен нулю и в любой точке этого интервала.

Скобочный вариант легко доказывается теперь от противного.

Определение. *Совокупность из любых n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения (1′) называется фундаментальной системой решений для этого уравнения.*

Нетрудно доказать, что любое уравнение вида (1′) имеет фундаментальную систему решений.

Сформулируем теперь *теорему о структуре общего решения уравнения (1′).*

Теорема 5. *Если частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (1′) образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения определяется равенством:*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (7)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство. Согласно следствию (с. 446) y из (7) есть решение для (1'), и притом содержащее как раз n произвольных постоянных. Поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что любое частное решение уравнения (1'), удовлетворяющее заданным начальным условиям: при $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $y' = \bar{y}'$, $y'' = \bar{y}''$, ..., $y^{(n-1)} = \bar{y}^{(n-1)}$, можно получить из (7) при надлежащим образом подобранных значениях параметров $C_1, C_2, \ldots, C$ (ср. с. 435).

Найдем значения функции y вида (7) и ее последовательных производных до $(n-1)$-го порядка включительно в точке $x = \bar{x}$ и приравняем эти значения соответственно заданным числам $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, ..., $\bar{y}^{(n-1)}$. Тогда получим систему линейных уравнений относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ вида:

$$\begin{cases} C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 + \ldots + C_n\bar{y}_n = \bar{y}, \\ C_1\bar{y}_1' + C_2\bar{y}_2' + \ldots + C_n\bar{y}_n' = \bar{y}', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1\bar{y}_1^{(n-1)} + C_2\bar{y}_2^{(n-1)} + \ldots + C_n\bar{y}_n^{(n-1)} = \bar{y}^{(n-1)}, \end{cases}$$

определитель которой есть значение $W(\bar{x})$ вронскиана частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Так как эти решения, образуя фундаментальную систему, линейно независимы в (α, β), то $W(\bar{x}) \neq 0$ (следствие 1 из теоремы 4) и потому эта система имеет решение (и только одно). Таким образом, нужный набор значений произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ существует. Теорема доказана.

Пример 1. Решить уравнение $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

Решение. Коэффициенты уравнения — непрерывные на $(-\infty, +\infty)$ функции от x, тем самым оно подчиняется теореме 5.

Легко проверить, что функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = x$ — частные решения уравнения. Они образуют фундаментальную систему данного уравнения. Действительно, для этих функций $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix}$, $W(0) = 1 \neq 0$, а тогда по теореме 5 общее решение этого дифференциального уравнения есть $y = C_1e^x + C_2x$.

2. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Общий вид такого уравнения следующий (см. (1)):

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x),$$

где $f(x)$ не обращается тождественно в нуль в данном интервале (α, β), в котором коэффициенты $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а также $f(x)$ — непрерывные функции.

Составим однородное линейное дифференциальное уравнение с той же левой частью, что и в (1); его называют соответствующим уравнению (1) однородным уравнением (1'):

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0.$$

Между решениями уравнений (1) и (1′) имеется связь, устанавливаемая следующей теоремой.

Теорема 6. *Общее решение y неоднородного уравнения* (1) *может быть представлено как сумма общего решения $u(x)$ соответствующего ему однородного уравнения* (1′) *и любого частного решения $v(x)$ неоднородного уравнения* (1):

$$y = u(x) + v(x). \tag{8}$$

Доказательство. По условию имеют место два тождества:

$$u^{(n)}(x) + a_1(x)\,u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)u(x) = 0,$$
$$v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)v(x) = f(x).$$

Складывая их почленно, после преобразований получаем тождество:

$$(u(x) + v(x))^{(n)} + a_1(x)\,(u(x) + v(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,(u(x) + v(x)) = f(x),$$

которое показывает, что функция y из (8) при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, входящих в $u(x)$, является решением уравнения (1).

Нетрудно, далее, показать, что при произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ формула (8) будет выражать общее решение для (1). В самом деле, по доказанному выше $u(x)$ может быть представлено в виде: $u(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — какая-либо фундаментальная система решений для однородного уравнения (1), и поэтому формула (8) может быть записана так:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + v(x). \tag{8′}$$

После $(n-1)$ дифференцирований функции $y - v(x)$ мы сможем составить (относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$) систему линейных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = y - v(x),\\
&C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' = y' - v'(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} = y^{(n-1)} - v^{(n-1)}(x),
\end{aligned}$$

главный определитель которой есть вронскиан $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; он в силу линейной независимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ отличен от нуля в любой точке x_0 рассматриваемого интервала (α, β) (следствие 1 из теоремы 4), а потому эта система при любом выборе значений $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ $(x_0 \in (\alpha, \beta))$ и любом значении $v_0 = v(x_0)$ имеет решение относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Тем самым (8) дает общее решение неоднородного уравнения (1).

Частное решение неоднородного уравнения (1) может быть найдено по *методу Лагранжа.*

Пусть дифференциальное уравнение (1'), соответствующее уравнению (1), имеет общее решение:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (9)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений для (1'). Здесь $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если, однако, рассматривать эти параметры в (9) как переменные величины, зависящие от x, то функция (9) перестает, вообще говоря, быть решением для (1'), но при надлежащем подборе этих параметров — функций от x — может стать решением уже для (1). Покажем, что такой подбор функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ всегда возможен.

Рассматривая в (9) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ как уже подобранные нужным образом функции от x, мы найдем, что функция y из (9) удовлетворяет уравнению (1). Но теперь производная y' уже должна находиться как сумма производных от произведений $C_iy_i (i=1, 2, \ldots, n)$:

$$y' = C_1y_1' + C_1'y_1 + C_2y_2' + C_2'y_2 + \ldots + C_ny_n' + C_n'y_n =$$
$$= (C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n') + (C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \qquad (10)$$

при котором y' будет иметь тот же вид, как и при постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$: $y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'$ (хотя теперь, конечно, здесь $C_1, C_2, \ldots, C_n$ уже некоторые функции). Находим отсюда y'':

$$y'' = (C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n'') + (C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n'),$$

и потребуем, чтобы и y'' имело тот же вид, как при постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, для чего положим:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0. \qquad (10_1)$$

Тогда будем иметь: $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$. Поступая так дальше, мы после $(n-1)$-го шага $(n \geqslant 2)$ получим соотношения:

$$C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \qquad (10_{n-2})$$

и $y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}$*), откуда

$$y^{(n)} = (C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)}) + (C_1'y_1^{(n-1)} +$$
$$+ C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)}).$$

Чтобы функция (9) была решением уравнения (1), необходимо на функции $C_1, C_2, \ldots, C_n$ наложить следующее ограничение:

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \qquad (10_{n-1})$$

---

*) Считая при этом, что здесь $y_i^{(0)} = y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и (10_0) есть (10).

Тогда при ограничениях (10)—(10_{n-1}) функция (9) действительно будет решением уравнения (1): по-прежнему, как и для (1′),

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \text{ и } y^{(k)} = C_1y_1^{(k)} + C_2y_2^{(k)} + \ldots + C_ny_n^{(k)} \ (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и только

$$y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + f(x),$$

а потому результат подстановок функции y из (9) и ее указанных последовательных производных в левую часть (1) будет таким же, как и для (1′), за исключением результата подстановки $y^{(n)}$, который отличается слагаемым $f(x)$ от аналогичного результата подстановки в (1′). Но результат подстановки функции y из (9) (при постоянных C_1, C_2, ..., C_n) и ее последовательных производных в левую часть (1′) равен нулю, значит, для (1) результат указанной подстановки будет $f(x)$ и уравнение (1) обратится при этом в тождество. Таким образом, если на переменные C_1 C_2, ..., C_n наложить ограничения (10)—(10_{n-1}), то мы придем с помощью (9) к решению уравнения (1). Остается убедиться, что эти ограничения всегда позволяют (для $x \in (\alpha, \beta)$) отыскивать C_1, C_2, ..., C_n. В самом деле, система из n линейных уравнений относительно C_1', C_2', ..., C_n':

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{11}$$

имеет главным определителем вронскиан $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ линейно независимых функций y_1, y_2, ..., y_n, и потому определитель W отличен от нуля в любой точке $x = x_0 \in (\alpha, \beta)$, а значит, система (11) однозначно разрешима относительно C_1', C_2', ..., C_n'. Находя из (11) значения указанных производных, мы получим для них выражения в виде рациональных функций от непрерывных функций y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', ..., $y_1^{(n-1)}$, $y_2^{(n-1)}$, ..., $y_n^{(n-1)}$ и $f(x)$, причем знаменатель $W(x)$ этих рациональных функций всюду в (α, β) отличен от нуля; C_1', C_2', ..., C_n' будут также непрерывными функциями $C_i' = \mu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, поэтому существуют в (α, β) неопределенные интегралы от этих функций:

$$C_1 = \int \mu_1(x)dx + \overline{C}_1, \ C_2 = \int \mu_2(x)dx + \overline{C}_2, \ \ldots, \ C_n = \int \mu_n(x)dx + \overline{C}_n,$$

где $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, ..., $\overline{C}_n$ — произвольные постоянные. При этом, подставляя найденные для C_1, C_2, ..., C_n значения в (9), мы придем по дока-

занному к решению для уравнения (1) (черточки над C_i в ответе сняты):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + v(x), \qquad (12)$$

где положено $v(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \mu_i(x)dx$. Это решение по теореме 6 — общее для (1): сумма $u(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ — общее решение для (1'), а $v(x)$ — частное решение для (1), так как его можно получить из (12) при значениях $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, ..., $C_n = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 3 - 3x^2$.

Р е ш е н и е. Составляем однородное уравнение, соответствующее данному: $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$; оно равносильно (при $x \neq 1$) однородному уравнению из примера 1, и потому имеет с ним (для этих x) одно и то же общее решение: $y = C_1e^x + C_2x$.

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, составим систему уравнений вида (11):

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'x = 0, \\ C_1'e^x + C_2' = 3 - 3x^2, \end{cases}$$

откуда находим $C_2' = 3 + 3x$ и $C_1' = -(3x + 3x^2)e^{-x}$, что дает:

$$C_1 = -\int (3x + 3x^2)\,e^{-x}\,dx = (3x^2 + 9x + 9)\,e^{-x} + \bar{C}_1, \quad C_2 = 3x + \frac{3}{2}x^2 + \bar{C}_2.$$

Подставляя эти значения для C_1 и C_2 в равенство $y = C_1e^x + C_2x$, мы придем к общему решению заданного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2x + \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 + 9x + 9.$$

§ 99. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Нахождение общего решения линейных дифференциальных уравнений значительно упрощается, если эти уравнения имеют постоянные коэффициенты.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Общий вид таких уравнений следующий:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \qquad (1)$$

где a_1, a_2, ..., a_n — некоторые действительные числа.

Оказывается, решение уравнений вида (1) можно свести к решению алгебраических уравнений.

Так как функция y и ее производные в (1) умножаются на постоянные числа, а сумма равна нулю, то производные искомой функции y должны быть максимально близки по виду друг к другу и к y. Одной из таких функций является функция вида: $y = e^{kx}$, где

k — некоторая постоянная. Найдем условие, необходимое для того, чтобы эта функция была частным решением для (1). Так как $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2e^{kx}$; ...; $y^{(n)} = k^ne^{kx}$, то результат подстановки $y = e^{kx}$ в левую часть уравнения (1)

$$L(e^{kx}) = k^ne^{kx} + a_1k^{n-1}e^{kx} + \ldots + a_{n-1}ke^{kx} + a_ne^{kx} = \\ = e^{kx}(k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n)$$

должен быть равен нулю, откуда следует (так как $e^{kx} \neq 0$), что должно иметь место следующее условие:

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (2)$$

Обратно, если k удовлетворяет уравнению (2), то $L(e^{kx}) = 0$ и $y = e^{kx}$ будет решением для (1).

Равенство (2) называется *характеристическим* уравнением для дифференциального уравнения (1). Задача, таким образом, свелась к нахождению корней алгебраического уравнения.

Возможно три случая.

1. Все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ уравнения (2) действительные и различные. В этом случае по только что доказанному мы имеем n частных решений для (1): $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$, ..., $y_n = e^{k_nx}$. Для этих решений вронскиан будет:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \ldots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \ldots & k_ne^{k_nx} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & \ldots & k_n^2e^{k_nx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \ldots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+\ldots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Последний определитель есть известный определитель Вандермонда, который может быть равен нулю только тогда, когда среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ есть хотя бы два равных, что в рассматриваемом случае исключено. Таким образом, $W(x) \neq 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ и функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ составляют фундаментальную систему для (1), а потому (§ 98) уравнение (1) имеет в этом случае общее решение вида:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \ldots + C_ne^{k_nx}. \qquad (3)$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' - 4y'' - y' + 6y = 0$.

Решение. Это линейное однородное уравнение (третьего порядка) с постоянными коэффициентами. Составим для него характеристическое уравнение: $k^3 - 4k^2 + k + 6 = 0$. Решаем его.

$$k^3 - 4k^2 + k + 6 = (k^3 - 4k^2 + 4k) - 3k + 6 = k(k-2)^2 - 3(k-2) = \\ = (k-2)(k^2 - 2k - 3) = (k+1)(k-3)(k-2).$$

Таким образом, корни характеристического уравнения есть: $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, и, следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения будет: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

2. Все корни характеристического уравнения (2) действительные, но среди них есть кратные. Пусть, например, корень k_1 имеет кратность s_1. Тогда этому корню соответствует среди решений вида e^{kx} только одно частное решение $e^{k_1 x}$. Однако можно доказать, что в этом случае корень k_1 порождает s_1 линейно независимых решений вида: $e^{k_1 x}$, $xe^{k_1 x}$, $x^2 e^{k_1 x}$, ..., $x^{s_1 - 1} e^{k_1 x}$.

Если k_1, k_2, ..., k_r — все различные корни уравнения (2), имеющие соответственно кратности $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_r$ ($s_i > 1$, хотя бы для одного i, $s_1 + s_2 + \ldots + s_r = n$), то мы получим в этом случае n линейно независимых частных решений вида:

$$\begin{array}{l} e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ x^2 e^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{s_1-1} e^{k_1 x}, \\ e^{k_2 x},\ xe^{k_2 x},\ x^2 e^{k_2 x},\ \ldots,\ x^{s_2-1} e^{k_2 x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{k_r x},\ xe^{k_r x},\ x^2 e^{k_r x},\ \ldots,\ x^{s_r-1} e^{k_r x}, \end{array}$$

которые в своей совокупности снова будут образовывать фундаментальную систему. Проверять это утверждение в общем виде мы не будем ввиду сравнительной громоздкости сопутствующих доказательству вычислений и ограничимся проверкой его лишь для часто встречающегося частного случая $n = 2$. Имеем уравнение:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (1')$$

где a_1 и a_2 — некоторые постоянные числа. Соответствующее ему характеристическое уравнение будет:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (2')$$

В рассматриваемом случае ($a_1^2 = 4a_2$) это уравнение имеет равные корни: $k = k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$, откуда $a_1 + 2k = 0$.

Покажем, что, кроме частного решения $y_1 = e^{kx}$, имеется еще и решение $y_2 = xe^{kx}$. Действительно, $y_2' = e^{kx}(kx + 1)$, $y_2'' = e^{kx}(k^2 x + 2k)$ и $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = e^{kx}(k^2 x + 2k) + a_1 e^{kx}(kx + 1) + a_2 e^{kx} = e^{kx}[(k^2 + a_1 k + a_2)x + (a_1 + 2k)] \equiv 0$, ибо $k = -\frac{a_1}{2}$ — ко-

рень уравнения (2′) и, кроме того, $a_1 + 2k = 0$. При этом решения y_1 и y_2 линейно независимы:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (kx+1)e^{kx} \end{vmatrix} = e^{kx} \neq 0,$$

и общее решение данного уравнения (1′) будет иметь вид $\left(k = -\frac{a_1}{2}\right)$:

$$y = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x}. \qquad (4)$$

3. Среди корней уравнения (2) есть мнимые. Пусть, например, $k = \alpha + \beta i$ есть мнимый корень ($\beta \neq 0$) характеристического уравнения (2) кратности s ($s \geqslant 1$). Поскольку это уравнение имеет действительные коэффициенты, то, как известно, его мнимые корни попарно сопряженные и (2) должно иметь еще и корень $\bar{k} = \alpha - \beta i$ той же кратности. Тогда эта пара корней (каждый из которых считается за s корней) порождает $s + s = 2s$ частных линейно независимых решений уравнения (1):

$$x^{\lambda-1} \cos \beta x\, e^{\alpha x} \quad \text{и} \quad x^{\lambda-1} \sin \beta x\, e^{\alpha x} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, s). \qquad (5)$$

Не доказывая этого утверждения в общем виде, мы снова рассмотрим лишь частный случай, когда $n = 2$. Пусть мнимые корни уравнения (2′) таковы: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$.

Так как $k_1 = \alpha + \beta i$ — корень для (2′), то $(\alpha + \beta i)^2 + a_1(\alpha + \beta i) + a_2 = 0$, или $(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2) + \beta(2\alpha + a_1)i = 0$, откуда, применяя условие равенства комплексного числа нулю, и учитывая, что $\beta \neq 0$, мы приходим к равенствам:

$$\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \quad 2\alpha + a_1 = 0. \qquad (6)$$

Докажем теперь, что функция вида $y = e^{\alpha x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right)$, где $\varepsilon^2 = 1$, является частным решением уравнения (1′). Находим (см. равенства (6)):

$$y' = e^{\alpha x}\left[\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) - \varepsilon\beta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right)\right],$$

$$y'' = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) - 2\varepsilon\alpha\beta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right)\right]$$

и

$$L(y) = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) - 2\varepsilon\alpha\beta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) + \right.$$

$$\left. + a_1\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) - a_1\varepsilon\beta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) + a_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right)\right] =$$

$$= \left[(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right) - \right.$$

$$\left. - (2\alpha + a_1)\beta\varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\beta x\right)\right] e^{\alpha x} \equiv 0.$$

При $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 1$ находим соответственно частные решения:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x),$$

$$\bar{\bar{y}} = e^{\alpha x}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x),$$

а тогда по следствию из теоремы 2 § 98 функции

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\bar{y}} = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\bar{y}} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

также будут частными решениями уравнения (1′), причем для них

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix},$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0$$

и решения y_1 и y_2 линейно независимы (§ 98). В таком случае общее решение уравнения (1′) здесь будет: $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$, или

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \tag{7}$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 2(a+b)y' + 2(a^2+b^2) = 0$ (a и b — действительные числа).

Р е ш е н и е. Находим корни соответствующего характеристического уравнения: $k_{1,2} = a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 2(a^2+b^2)} = a + b \pm \sqrt{-(a-b)^2}$.

Если $b \neq a$, то k_1 и k_2 — мнимые числа; $k_{1,2} = (a+b) \pm (a-b)i$, и тогда по (7) общим решением данного дифференциального уравнения будет:

$$y = e^{(a+b)x}[C_1\cos(a-b)x + C_2\sin(a-b)x].$$

Если же $b = a$, то уравнение имеет действительный двойной корень: $k = k_1 = k_2 = a + b = 2a$, и по (4) общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y = (C_1 + C_2 x)e^{2ax}$.

Пример 3. Решить уравнение $y^{V} - y^{IV} + y^{III} + y^{II} - y^{I} + y = 0$.

Р е ш е н и е. Соответствующее характеристическое уравнение будет: $k^5 - k^4 + k^3 + k^2 - k + 1 = 0$. Решаем его: $(k^5 + k^2) - (k^4 + k) + (k^3 + 1) = 0$, $(k^3+1)(k^2 - k + 1) = 0$, $(k+1)(k^2 - k + 1)^2 = 0$.

Уравнение имеет один действительный корень $k_1 = -1$ и два двукратных мнимых корня: $k_2 = k_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_4 = k_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Паре двукратных мнимых корней k_3 и k_5 соответствует четыре линейно независимых частных решения: $e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $xe^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $xe^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (см. (5)). Следовательно, искомое общее решение таково: $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + xe^{\frac{x}{2}}\left(C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения имеют вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (8)$$

где a_1, a_2, ..., a_n — некоторые (действительные) числа, а $f(x)$ — непрерывная в заданном интервале (a, b) функция.

Как известно (§ 98), нахождение общего решения такого уравнения сводится к нахождению общего решения $u(x)$ соответствующего ему однородного линейного уравнения (1) и частного решения $v(x)$ уравнения (8). Но общее решение уравнения (1) здесь находится без квадратур, с помощью лишь решения алгебраического уравнения (2). Для отыскания же частного решения $v(x)$, а значит, и общего решения уравнения (8) можно снова применить метод вариации произвольных постоянных (§ 98).

Однако, как правило, метод вариации произвольных постоянных ведет к громоздким вычислениям, и потому в теории дифференциальных уравнений разработаны специальные методы нахождения частных решений неоднородных уравнений часто встречающихся типов. Особенно часто встречаются такие уравнения (8), правая часть которых $f(x)$ есть функция одного из видов: 1) $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ или 2) $f(x) = e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$, где α и β — действительные числа, $P_m(x)$ — многочлен степени m*), а $P_m^{(1)}(x)$ и $P_m^{(2)}(x)$ — многочлены, из которых один имеет степень m, а другой — степень, которая не выше, чем m**). В первом случае следует искать частное решение для (8) вида: $v(x) = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$, где r — кратность корня α для характеристического уравнения (2) соответствующего однородного уравнения (если α не является вообще корнем для (2), то берут $r=0$); во втором случае полагают: $v(x) = x^r e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$, где r — кратность корня $\alpha + \beta i$ для (2) (снова здесь $r = 0$, если $\alpha + \beta i$ не есть корень уравнения (2)). Сами многочлены $Q_m(x)$, $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ разыскиваются при этом по методу неопределенных коэффициентов. Не доказывая соответствующего утверждения в общем виде, ограничимся ее доказательством для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (8')$$

Пусть $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$. Рассмотрим три подслучая.

1. α не является корнем уравнения (2').

---

*) Не исключается из рассмотрения и тот случай, когда полином $P_m(x)$ имеет нулевую степень или, когда $\alpha = 0$.

**) И здесь может быть, что хотя бы один из полиномов $P_m^{(1)}$ и $P_m^{(2)}$ имеет нулевую степень (или $\alpha = 0$).

Ищем частное решение для (8′) того же вида, что и $f(x)$: $v(x) = e^{\alpha x}Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ — многочлен m-й степени. Имеем:

$$v' = \alpha e^{\alpha x}Q_m(x) + e^{\alpha x}Q'_m(x),\ v'' = \alpha^2 e^{\alpha x}Q_m(x) + 2\alpha e^{\alpha x}Q'_m(x) + e^{\alpha x}Q''_m(x).$$

Поскольку $v(x)$ ищется как частное решение для (8′), то должно выполняться тождество:

$$\alpha^2 e^{\alpha x}Q_m(x) + 2\alpha e^{\alpha x}Q'_m(x) + e^{\alpha x}Q''_m(x) + a_1\alpha e^{\alpha x}Q_m(x) + a_1 e^{\alpha x}Q'_m(x) + a_2 e^{\alpha x}Q_m(x) = f(x),$$ откуда

$$(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q_m(x) + (a_1 + 2\alpha)Q'_m(x) + Q''_m(x) = P_m(x).$$

Если теперь $P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\ (p_0 \neq 0)$, а $Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m$, где коэффициенты q_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ подлежат определению, то предыдущее тождество перепишется так:

$$(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)(q_0x^m + q_1x^{m-1} + q_2x^{m-2} + \ldots + q_{m-1}x + q_m) + (a_1 + 2\alpha)[q_0mx^{m-1} + q_1(m-1)x^{m-2} + \ldots + 2q_{m-2}x + q_{m-1}] + [q_0m(m-1)x^{m-2} + q_1(m-1)(m-2)x^{m-3} + \ldots + 3 \cdot 2q_{m-3}x + 2 \cdot 1 \cdot q_{m-2}] = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m,$$

или

$$(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_0x^m + [(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_1 + (a_1 + 2\alpha)q_0m]x^{m-1} + [(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_2 + (a_1 + 2\alpha)q_1(m-1) + q_0m(m-1)]x^{m-2} + \ldots + [(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_{m-1} + (a_1 + 2\alpha)2q_{m-2} + 3 \cdot 2 \cdot q_{m-3}]x + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_m + (a_1 + 2\alpha)q_{m-1} + 2 \cdot 1 \cdot q_{m-2} = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в частях этого равенства, получим следующую систему равенств-уравнений относительно коэффициентов искомого многочлена $Q_m(x)$:

$$\begin{cases} (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_0 = p_0, \\ (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_1 + (a_1 + 2\alpha)mq_0 = p_1, \\ (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_2 + (a_1 + 2\alpha)(m-1)q_1 + m(m-1)q_0 = p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_k + (a_1 + 2\alpha)(m-k+1)q_{k-1} + (m-k+2)(m-k+1)q_{k-2} = p_k,\ (k \geqslant 2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)q_m + (a_1 + 2\alpha) \cdot 1 \cdot q_{m-1} + 2 \cdot 1 \cdot q_{m-2} = p_m. \end{cases}$$

Так как $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \neq 0$, то мы можем из первого уравнения системы найти q_0; затем из второго уравнения (подставляя в него предварительно найденное значение для q_0) найти q_1, из третьего уравнения затем найти q_2 и т. д. и, наконец, из последнего уравнения найти q_m. Таким образом, все коэффициенты искомого полинома $Q_m(x)$ находятся (и притом однозначно). Непосредственно проверяется, что при таком $Q_m(x)$ уравнение (8) действительно имеет решение вида: $v(x) = e^{\alpha x}Q_m(x)$.

2. **α является однократным корнем характеристического уравнения** (2′). В этом случае по известному критерию из алгебры

$$\psi(\alpha) = \alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \quad \psi'(\alpha) = 2\alpha + a_1 \neq 0. \qquad (9)$$

Теперь будем искать для (8′) частное решение вида: $v(x) = xe^{\alpha x}Q_m(x)$ ($r = 1$), где $Q_m(x)$ записывается в том же виде, что и выше. Тогда

$$v'(x) = e^{\alpha x}[(1 + \alpha x)Q_m(x) + xQ'_m(x)],$$
$$v''(x) = e^{\alpha x}[(2\alpha + \alpha^2 x)Q_m(x) + (2 + 2\alpha x)Q'_m(x) + xQ''_m(x)].$$

Поскольку $v(x)$ — частное решение для (8′), то, учитывая еще и первое из соотношений (9), мы получаем тождество:

$$(a_1 + 2\alpha)(m + 1)q_0x^m + [(2\alpha + a_1)mq_1 + A_1q_0]x^{m-1} + \\ + [(2\alpha + a_1)\cdot(m - 1)q_2 + A_2q_1 + B_2q_0]x^{m-2} + \ldots + [(2\alpha + \\ + a_1)(m - k + 1)q_k + A_kq_{k-1} + B_kq_{k-2}]x^{m-k} + \ldots + [(2\alpha + \\ + a_1)2q_{m-1} + A_{m-1}q_{m-2} + B_{m-1}q_{m-1}]x + (2\alpha + a_1)q_m + \\ + 2q_{m-1} = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ — некоторые числа. (Например, $A_1 = 2ma_1 + m(m - 1)$). Эти обозначения (для краткости) введены для тех коэффициентов при q_i, значение которых здесь несущественно. Отсюда мы получаем такую систему линейных уравнений относительно $q_0, \ldots, q_m$:

$$\begin{aligned}
&(2\alpha + a_1)(m + 1)q_0 && = p_0,\\
&(2\alpha + a_1)mq_1 + A_1q_0 && = p_1,\\
&(2\alpha + a_1)(m - 1)q_2 + A_2q_1 + B_2q_0 && = p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(2\alpha + a_1)(m - k + 1)q_k + A_kq_{k-1} + B_kq_{k-2} && = p_k \ (k \geqslant 2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(2\alpha + a_1)\cdot 1\cdot q_m + 2\cdot q_{m-1} + 0\cdot q_{m-2} && = p_m,
\end{aligned}$$

у которых коэффициент при (старшем по номеру) неизвестном q_s в $(s + 1)$-м уравнении ($s = 0, 1, 2, \ldots, m$) отличен от нуля: $2\alpha + a_1 \neq 0$ (см. (9)), а q_s может появляться в данном многочлене $Q_m(x)$ только, если $s \leqslant m$, и потому сомножитель $(m - s + 1)$ при q_s в уравнениях системы также отличен от нуля, и мы заключаем (как и выше), что записанная система имеет единственное решение относительно $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$.

3. α — **двукратный корень для** (2′). Имеем тождества:

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \ 2\alpha + a_1 = 0. \qquad (10)$$

Теперь ищем частное решение вида: $v(x) = x^2Q_m(x)$. Поступая точно так же, как и выше, и учитывая равенства (10), мы придем к равенству: $2Q_m(x) + 4xQ'_m(x) + x^2Q''_m(x) = P_m(x)$, из которого аналогично предыдущему получим относительно $q_0, q_1, \ldots, q_m$ систему уравнений вида: $(m - k + 1)(m - k + 2)q_k = p_k$

($k=0, 1, \ldots, m$), из которой коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_m$ легко находятся по формуле: $q_k = \dfrac{p_k}{(m-k+1)(m-k+2)}$.

Случай, когда правая часть в (8) имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(P_m^{(1)} \cos \beta x + Q_m^{(1)} \sin \beta x)$, разбирается аналогично.

При решении примеров полезно иметь в виду также следующее: если в (8) правая часть есть сумма двух (аналогично нескольких) слагаемых $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и если найдены каким-либо образом частные решения $v_1(x)$ и $v_2(x)$ двух соответствующих (8) (т. е. с правыми частями $f_1(x)$ и $f_2(x)$) уравнений, то сумма $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ будет частным решением для (8). В самом деле, если левая часть уравнения (8) есть $L(y)$, то по условию $L[v(x)] = f_1(x)$ и $L[v_2(x)] = f_2(x)$, откуда

$$L[v(x)] = L[v_1(x) + v_2(x)] = L[v_1(x)] + L[v_2(x)] = f_1(x) + f_2(x).$$

Отметим также, что, решая примеры подобного рода, предпочитают не выписывать готовых выражений для частных решений $v(x)$, а находить эти решения непосредственно, повторяя всякий раз заново соответствующие вычисления.

Пример 4. Решить уравнение: $y'' - 2y' + 5y = 125x^2 + e^x \sin 2x$, а также найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y_0 = y(0) = 1$, $y_0' = y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Корни характеристического уравнения есть $k_1 = 1 + 2i$ и $k_2 = 1 - 2i$ и $u(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^x$. Функции $f_1(x) = 125x^2 = 125x^2 e^0$ соответствует частное решение вида $v_1(x) = Ax^2 + Bx + C$, а функции $f_2(x) = e^x \sin 2x$, где $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и $\alpha + \beta i$ — корень (k_1) характеристического уравнения, соответствует частное решение вида:

$$v_2(x) = xe^x (M \cos 2x + N \sin 2x).$$

Находим $v_1'(x) = 2Ax + B$, $v_1''(x) = 2A$ и $2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 125x^2$, откуда $5A = 125$, $5B - 4A = 0$, $5C - 2B + 2A = 0$ и $A = 25$, $B = 20$, $C = -2$, а $v_1(x) = 25x^2 + 20x - 2$. Далее имеем:

$$v_2'(x) = [(M + 2Nx + Mx)\cos 2x + (N - 2Mx + Nx)\sin 2x]e^x,$$

$$v_2''(x) = [(2M + 4N - 3Mx + 4Nx)\cos 2x + (2N - 4M - 4Mx - 3Nx)\sin 2x]e^x,$$

и потому должно быть:

$$\{(2M + 4N - 3Mx + 4Nx)\cos 2x + (2N - 4M - 4Mx - 3Nx)\sin 2x - 2[(M + 2Nx + Mx)\cos 2x - 2(N - 2Mx + Nx)\sin 2x] + 5(Mx \cos 2x + Nx \sin 2x)\}e^x = e^x \sin 2x,$$

откуда приходим к следующей системе уравнений: $4N = 0$, $-4M = 1$, и, значит, $M = -\dfrac{1}{4}$, $N = 0$, так что $v_2(x) = -\dfrac{1}{4}xe^x \cos 2x$. Таким образом, $v(x) = v_1(x) + v_2(x) = 25x^2 + 20x - 2 - \dfrac{1}{4}xe^x \cos 2x$, и искомое общее решение будет:

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^x - \frac{1}{4}xe^x \cos 2x + 25x^2 + 20x - 2. \qquad (11)$$

Найдем теперь указанное в условии частное решение данного уравнения. Из (11) имеем:

$$y' = (-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^x -$$

$$-\frac{1}{4}e^x\cos 2x - \frac{1}{4}xe^x\cos 2x + \frac{1}{2}xe^x\sin 2x + 50x + 20. \qquad (12)$$

Используя условие $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, мы получим из (11) и (12) систему двух уравнений для определения C_1 и C_2: $C_1 - 2 = 1, C_1 + 2C_2 = -\frac{79}{4}$, из которой получаем: $C_1 = 3$, $C_2 = -\frac{91}{8}$, и соответствующее частное решение будет (см. (11)):

$$y = \left(3\cos 2x - \frac{91}{8}\sin 2x\right)e^x - \frac{1}{4}xe^x\cos 2x + 25x^2 + 20x - 2.$$

§ 100. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССАМ

Одним из приложений дифференциальных уравнений является их применение к колебательным процессам, из которых простейшими являются механические колебания.

Пусть, например, пружина, прикрепленная в точке O, находится под действием силы P — веса подвешенного груза (массы m), тогда под влиянием силы упругости (которая в положении равновесия в точности равна действующей силе) пружина приходит в колебательное движение. При этом на тело будет действовать сила $\vec{f}_1$ упругости пружины (восстанавливающая сила), которую мы будем считать пропорциональной величине отклонения x тела от положения равновесия: $|\vec{f}_1| = -\lambda x$ ($\lambda > 0$ — коэффициент пропорциональности). Эта сила направлена против движения. Кроме того, будем считать, что тело движется в сопротивляющейся среде (воздухе, некоторой жидкости и т. п.), сила сопротивления $\vec{f}_2$ которой пропорциональна (как это часто бывает) скорости $v = \frac{dx}{dt}$ (t — время) движения тела и имеет направление, также противоположное направлению этого движения: $|\vec{f}_2| = -\mu\frac{dx}{dt}$ (μ — коэффициент пропорциональности; $\mu \geqslant 0$). Наконец, будем предполагать, что, помимо этого, на тело действует сила, численно равная $F = F(t)$, где $F(t)$ — некоторая функция времени t; сила эта направлена вдоль прямой, по которой тело движется. Поставим тогда перед собой задачу: найти уравнение движения тела.

Используя второй и третий законы Ньютона, мы можем составить на основании сказанного выше уравнение:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = |\vec{f}_1| + |\vec{f}_2| + F.$$

Подставляя в это уравнение значения для $|\vec{f}_1|$ и $|\vec{f}_2|$, перенося все члены, кроме F, в левую часть и разделив обе части полученного уравнения на m, мы придем к уравнению вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = f(t), \qquad (1)$$

где $a_1 = \frac{\mu}{m} \geqslant 0$*), $a_2 = \frac{\lambda}{m} > 0$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$.

Получилось уравнение движения тела в виде линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Может случиться, что $f(t) = 0$ для данного колебательного процесса, т. е. что движение совершается без влияния какой-либо внешней силы (помимо силы сопротивления среды). Такое колебание получает название *свободного колебания*; если же $f(t) \not\equiv 0$, то говорят, что мы имеем случай *вынужденных колебаний*.

Рассмотрим сначала случай свободных колебаний. Соответствующее уравнение будет однородным:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = 0. \tag{2}$$

Случай 1. Характеристическое для (2) уравнение $k^2 + a_1k + a_2 = 0$ имеет действительные и различные корни k_1 и k_2.

Здесь k_1 и k_2 оба отрицательны, так как a_1 и a_2 оба положительны (если бы $a_1 = 0$, то, поскольку $a_2 > 0$, корни не могли бы быть действительными) и уравнение (2) имеет общее решение вида:

$$x = C_1e^{-|k_1|t} + C_2e^{-|k_2|t}. \tag{3}$$

Случай 2. Характеристическое уравнение имеет действительные и равные корни: $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$.

Здесь снова $a_1 \neq 0$, иначе и $a_2 = 0$ ($a_1^2 = 4a_2$), что невозможно, так как $a_2 > 0$. Таким образом, и здесь $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, но теперь общее решение уравнения имеет вид:

$$x = C_1e^{-|k|t} + C_2te^{-|k|t}. \tag{4}$$

В первых двух случаях отклонение x тела от положения равновесия при $t \to +\infty$, как показывают равенства (3) и (4), стремится к нулю и колебаний около положения равновесия тело не испытывает. Физически это объясняется тем, что в этих случаях $a_1^2 \geqslant 4a_2$, т. е. $\mu^2 \geqslant 4\lambda m$ — коэффициент μ, а с ним и сила сопротивления $\vec{f}_2$ среды настолько велики, что сила $\vec{f}_1$ (здесь — упругая сила пружины), притягивающая тело к точке O, не может вызвать колебательное движение этого тела. В этих случаях говорят, что мы имеем *апериодическое движение*.

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет мнимые корни: $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$, где $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$ ($a_1^2 < 4a_2$) (сила сопротивления среды мала).

В этом случае общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$x = e^{-\frac{a_1}{2}t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t), \tag{5}$$

*) $a_1 = 0$ в случае отсутствия сопротивления внешней среды.

где значения постоянных C_1 и C_2, как и в предыдущих двух случаях, определяются из начальных условий (такими обычно являются условия: $t = 0$, $x = x_0$ и $\frac{dx}{dt} = 0 = v_0$). Полученное решение несколько преобразуем. Положим $\sin\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$, $\cos\varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ (так можно принять, поскольку $\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2 = 1$).

Обозначая $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ через A, преобразуем равенство (5):

$$x = Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\beta t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\beta t\right) =$$

$$= Ae^{-\frac{a_1}{2}t}(\sin\varphi\cos\beta t + \cos\varphi\sin\beta t)$$

или

$$x = Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\sin(\beta t + \varphi). \qquad (5')$$

Если $|\vec{f}_2| = 0$, т. е. движение совершается при отсутствии сопротивления среды, то $a_1 = 0$ и уравнение (5′) принимает вид:

$$x = A\sin(\beta t + \varphi). \qquad (6)$$

Это *уравнение простейшего гармонического колебания*. Здесь A и φ — постоянные, определяемые из начальных условий. Движение будет *периодическим*, с периодом $T = \frac{2\pi}{\beta}$. При этом $x_{\max} = A$ называется *амплитудой* (наибольшим размахом) *колебания*, φ — *сдвигом фазы*, а параметр β — *частотой колебания*.

Так как амплитуда A постоянна, то колебания будут незатухающими (в принципе, если бы в самом деле сопротивления среды не было, они могли бы длиться бесконечно долго).

Если же $|\vec{f}_2| \neq 0$, так что и $a_1 \neq 0$, то движение, описываемое законом (5′), также будет колебательным, так как функция $\sin(\beta t + \varphi)$ периодическая, но амплитуда колебания $a(t) = Ae^{-\frac{a_1}{2}t}$ здесь уже не будет постоянной: при $t \to \infty$ она стремится к нулю, и потому здесь колебания будут затухающими, причем быстрота этого затухания зависит от значения множителя $\frac{a_1}{2} = \frac{\mu}{2m}$ (логарифмического декремента колебания). Заметим, что и здесь β и $T = \frac{2\pi}{\beta}$ получают название частоты и периода колебания.

Рассмотрим теперь так называемые *вынужденные колебания*, которые представляются неоднородными линейными уравнениями вида (1). Мы остановимся лишь на частном случае.

Предположим, что $a_1 = 0$ (сопротивление среды отсутствует), т. е. что уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_2 x = f(t). \tag{7}$$

Тогда, поскольку $a_2 > 0$, корни характеристического уравнения будут мнимыми и общее решение уравнения (7) будет иметь вид:

$$x = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t + r(t),$$

где $r(t)$ — частное решение этого уравнения, а $\beta = \sqrt{a_2}$.

Преобразуя первые два члена этого соотношения, как и выше, мы приведем его к виду:

$$x = A \sin(\beta t + \varphi) + r(t). \tag{8}$$

О равенстве (8) говорят, что оно передает уравнение вынужденных колебаний, которые складываются из собственных колебаний тела, происходящих под влиянием силы $\vec{f}_1$ (ему соответствует первое слагаемое в (8)) и из вынужденных колебаний, происходящих под действием внешней («возмущающей») силы.

Особенно часто встречается на практике тот случай, когда «возмущающая» сила $\vec{f}(t)$ сама носит периодический характер, причем функция $f(t)$ имеет вид: $f(t) = M \sin \gamma t$, где M и γ — некоторые постоянные ($M \neq 0$, $\gamma > 0$). Разыщем тогда частное решение для (7) методом неопределенных коэффициентов. Предположим сначала, что $\gamma \neq \beta$. Тогда частное решение будем искать в виде: $r(t) = Q \sin \gamma t + R \cos \gamma t$ (Q и R — некоторые постоянные). Находим:

$$r'(t) = Q\gamma \cos \gamma t - R\gamma \sin t,\ r''(t) = -Q\gamma^2 \sin \gamma t - R\gamma^2 \cos \gamma t.$$

Подставляя в (7) выражения для r' и r'', получим (учитывая, что $a_2 = \beta^2$): $-Q\gamma^2 \sin \gamma t - R\gamma^2 \cos \gamma t + \beta^2 Q \sin \gamma t + \beta^2 R \cos \gamma t = M \sin \gamma t$,

откуда для определения Q и R имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} Q\beta^2 - Q\gamma^2 = M, \\ R\beta^2 - R\gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим ($\gamma \neq \beta$, $\gamma \neq -\beta$, последнее потому, что $\beta > 0$ и $\gamma > 0$): $R = 0$, $Q = \frac{M}{\beta^2 - \gamma^2}$, тогда $r(t) = \frac{M}{\beta^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$.

Окончательно общее решение для (7) будет иметь теперь вид:

$$x = A \sin(\beta t + \varphi) + \frac{M}{\beta^2 - \gamma^2} \sin \gamma t, \tag{9}$$

откуда видно, что тело участвует в двух простейших гармонических колебаниях — собственном (того же периода $T = \frac{2\pi}{\beta}$, что и у свободных колебаний тела) и собственно-вынужденном. При этом, как видно из (9), амплитуда колебаний ограничена.

Если теперь допустить, что в выражении для $f(t)$, $\gamma = \beta$, т. е. частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний тела, то частное решение для (7) придется искать уже в форме: $r(t) = t(Q\sin\gamma t + R\cos\gamma t)$. Имеем:

$$r'(t) = Q\sin\gamma t + R\cos\gamma t + t(Q\gamma\cos\gamma t - R\gamma\sin\gamma t),$$
$$r''(t) = 2Q\gamma\cos\gamma t - 2R\gamma\sin\gamma t + t(-Q\gamma^2\sin\gamma t - R\gamma^2\cos\gamma t).$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (7) дает (поскольку $\beta=\gamma$): $2Q\gamma\cos\gamma t - 2R\gamma\sin\gamma t - Qt\gamma^2\sin\gamma t - Rt\gamma^2\cos\gamma t + Qt\gamma^2\sin\gamma t + Rt\gamma^2\cos\gamma t = M\sin\gamma t$, откуда $Q = 0$, $R = -\frac{M}{2\gamma}$, и общее решение уравнения (7) теперь будет:

$$x = A\sin(\gamma t + \varphi) - \frac{M}{2\gamma}t\cos\gamma t. \qquad (10)$$

Из (10) видно, что теперь из-за второго слагаемого амплитуда колебания здесь неограниченно возрастает с возрастанием времени t (если даже M мало), т. е. если частота вынужденных колебаний будет совпадать с собственной частотой колебаний тела, то даже при малой по величине «возмущающей» силе можно при больших t получить как угодно большие амплитуды колебания. Это явление носит название *резонанса колебаний* и используется часто в усилительных установках, в радиотехнике. Но в ряде случаев (особенно связанных с механическим движением) явление резонанса может оказать и вредное (разрушающее) действие.

ГЛАВА XVI.

ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

§ 101. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

До сих пор, рассматривая дифференциальные уравнения, мы занимались лишь обыкновенными дифференциальными уравнениями (§ 81 и следующие). Однако в ряде вопросов самой математики, а также ее приложений (особенно к физике) встречается необходимость разыскивать функцию $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторого уравнения в частных производных. Общий вид дифференциального уравнения в частных производных таков:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \ldots \right) = 0, \qquad (1)$$

где незавершенная запись в конце скобок означает, что за $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}$ могут браться и иные частные производные m-го порядка от u.

Порядком m дифференциального уравнения в частных производных называется наивысший из порядков частных производных, входящих в это уравнение.

Всякая функция $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется его решением. Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь снова возникает вопрос об общем решении и параметрах (произвольных «постоянных»). Вопрос этот, однако, для уравнений в частных производных представляет более сложную проблему, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Не давая общих определений, сюда относящихся, мы сделаем по этому поводу лишь некоторые замечания.

Если, например, уравнение в частных производных первого порядка для функции u от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ включает только одну какую-либо частную производную, например $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, то, фиксируя значения остальных переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно u как функции от x_1, и тогда общее решение такого уравнения будет иметь вид:

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, C),$$

где C — произвольное постоянное. Однако здесь для нас существенно лишь то, чтобы частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ удовлетворяла взятому уравнению в частных производных, а тогда C может быть здесь взято не обязательно абсолютной постоянной, а и какой-либо функцией от $x_2, x_3, \ldots, x_n$: $C = \alpha(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, т. е. общее решение уравнения в частных производных первого порядка с одной лишь частной производной по x_1 должно содержать одну произвольную функцию от остальных переменных. Так, если для функции u от переменных x и y дано уравнение в частных производных $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}\sin x$, то общее решение его будет иметь вид:

$$u = \int \left(2xy + \frac{1}{y}\sin x\right) dx + C(y), \text{ т. е. } u = x^2y - \frac{\cos x}{y} + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y (определенная для $y \neq 0$).

Если, далее, это уравнение с одной частной производной (например, взятой по x_1) будет второго (или вообще n-го) порядка, то очевидно, следует ожидать, что в общем решении будет содержаться две (или вообще n) таких произвольных функций от остальных аргументов $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнений m-го порядка в частных производных, разрешенных относительно одной из своих частных производных $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}$, т. е. для уравнения вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_2^m}, \ldots\right), \qquad (2)$$

рассматривается вопрос о частном решении, удовлетворяющем некоторым специальным условиям (которые однозначно определяют это решение для (2), хотя бы из некоторого класса функций).

Существуют теоремы, которые доказывают при тех или иных ограничениях существование и единственность такого решения.

В вопросах математической физики часто встречаются уравнения в частных производных второго порядка и, прежде всего, однородные относительно этих производных уравнения. Для случая функции $u(x, y)$ двух переменных такое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{13}\frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{23}\frac{\partial u}{\partial y} + a_{33}u = 0. \qquad (3)$$

Запись коэффициентов здесь произведена по аналогии с тем, как записывают уравнение кривой второго порядка в аналитической геометрии, и аналогия эта дает основания для классификации уравнений вида (3) по дискриминанту: $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, по которому они подразделяются на уравнения эллиптического ($\delta > 0$), гиперболического ($\delta < 0$) и параболического ($\delta = 0$) типа.

Функция $u(x, y)$, являющаяся решением дифференциального уравнения (3), часто задается в виде суммы некоторого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$, члены которого есть функции от двух переменных. Такой ряд называется сходящимся в точке (x_0, y_0), если соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0, y_0)$ сходится. Точно так же, как и для обычных рядов, здесь устанавливается понятие области сходимости ряда, выводятся правила почленного дифференцирования и интегрирования таких рядов (по какому-либо из переменных) и т. д. В качестве примеров приложения дифференциальных уравнений в частных производных к математической физике рассмотрим здесь задачу о колебаниях струны.

§ 102. ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ

Пусть упругая, гибкая, туго натянутая струна, закрепленная в двух точках 0 (0, 0) и $A_0(l, 0)$ оси абсцисс, выведена из положения равновесия какой-либо силой и приведена тем самым (благодаря своей упругости) в колебательное движение. При этом будем предполагать, что при колебании струна все время находится в одной и той же плоскости — плоскости xOu и что каждая точка струны движется в направлении, перпендикулярном к оси Ox (рис. 115).

Величина отклонения u той или иной точки M этой струны от положения равновесия, очевидно, зависит от положения этой точки на оси Ox в начальный момент (т. е. от ее абсциссы x, остающейся для этой точки M, по условию, неизменной во все время колебания), а также от значения времени t, протекшего от начального момента, когда струна была выведена из положения равновесия. Таким образом, u есть функция от двух переменных x и t: $u = u(x, t)$; эта функция и определяет (при добавлении некоторых ограничительных условий) закон движения струны, который надлежит найти.

Наша первая задача состоит в том, чтобы составить для $u(x, t)$ дифференциальное уравнение в частных производных. При этом будем исходить из предположения, что струна однородна и что сила натяжения струны меняется пропорционально изменению ее длины. Сопротивление среды движению струны мы учитывать не будем, и колебания ее будем считать свободными (т. е. происходящими без воздействия внешних сил).

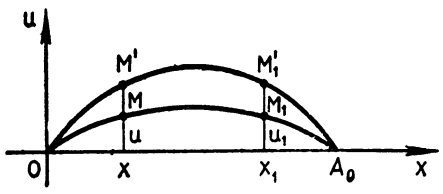


Рис. 115

Заметим, прежде всего, что частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ (которая предполагается из физических соображений существующей) в

данный фиксированный момент времени t в точке с абсциссой x геометрически означает угловой коэффициент касательной в точке $M(x, u)$ к кривой, представляющей положение струны в момент времени t: $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$, где α— угол наклона соответствующей касательной к оси Ox. Будем считать колебания струны малыми, тогда угол α мал, и в силу эквивалентности бесконечно малых (при $\alpha \to 0$) величин $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\alpha$ мы можем приближенно положить: $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\sin\alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$, и, кроме того, считать $ds \approx dx$, где ds—дифференциал малой дуги MM'(рис. 116), выделенной на струне для ее положения, соответствующего данному моменту времени t: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\,dx$, где при малых α и $\operatorname{tg}^2\alpha$ мало. Учитывая это, рассмотрим силу F, действующую на MM' в вертикальном направлении. Если $(\overset{\frown}{MH}, Ox) = \pi - \alpha$, а $(\overset{\frown}{M'\bar{H}}, Ox) = \bar{\alpha}$, где H и $\bar{H}$*)— силы натяжения струны в точках M и M' малого участка MM', то вертикальные составляющие этой силы будут соответственно $H\sin\alpha$ и $\bar{H}\sin\bar{\alpha}$. Тогда сила F равна разности этих составляющих:

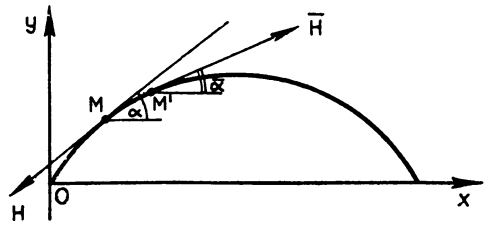


Рис. 116

$$F = \bar{H}\sin\bar{\alpha} - H\sin\alpha$$

(силы $H\sin\alpha$ и $\bar{H}\sin\bar{\alpha}$ берутся противоположно направленными: из сил $\bar{H}$ и H одна образует с осью Ox острый угол, а другая — тупой). В силу того же условия малого размаха колебаний силы H и $\bar{H}$ мы можем считать по величине приближенно равными (во все время движения) одной и той же величине H_0, тогда будем иметь:

$$F = H_0\sin\bar{\alpha} - H_0\sin\alpha = H_0\,(\sin\bar{\alpha} - \sin\alpha),$$

или ввиду приближенного равенства $\sin\alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$F = H_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_{M'}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_M}\right] = H_0\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

В силу малости Δx мы можем здесь заменить приращение функции $\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ ее дифференциалом $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$ (считая его существующим), тогда получим: $F = H_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$.

Обозначим массу единицы длины однородной струны (т. е. линейную ее плотность) через ρ, тогда масса m взятого элемента $MM' =$

*) Здесь, ради простоты записи, не различаются в обозначениях силы $\vec{F}$, $\vec{F}_1$, $\vec{H}$ и $\vec{\bar{H}}$ от их величин F, F_1, H и $\bar{H}$.

$= ds$ выразится произведением: $m = \rho ds \approx \rho dx$. Фиксируя абсциссу x точки M на струне и рассматривая ее прямолинейное движение по перпендикуляру к оси Ox, мы для скорости движения ее в момент времени t найдем выражение $\frac{\partial u}{\partial t}$, а для ускорения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, поэтому, по закону Ньютона, сила, действующая на рассматриваемый участок струны, равна $F_1 = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$. Так как $F_1 = F$, то мы отсюда получаем уравнение $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = H_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$, или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где через a обозначено частное $\frac{H_0}{\rho}$. Полученное уравнение (1) и есть искомое уравнение свободного колебания струны.

Уравнение (1) часто называют *волновым уравнением*. Это уравнение гиперболического типа: $\delta = 1\,(-a^2) - 0^2 = -a^2 < 0$. К нему приводит целый ряд задач теории колебаний (например, теории звуковых, электромагнитных и др. колебаний).

При решении этого уравнения (которое имеет само по себе бесконечно много решений) мы должны учитывать и ограничения, зависящие от конкретных физических условий. Здесь такие ограничения обычно бывают двух видов: начальные и граничные.

Начальные условия касаются закона движения струны и задают начальное положение точек струны (ее «форму») и начальную скорость, отвечающие моменту времени $t = 0$ (или вообще $t = t_0$) указанием наперед заданных функций.

$$u(x, 0) = f(x) \text{ и } \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{2}$$

Граничные же условия показывают состояние движения на концах струны, т. е. задают значения функции $u(x, t)$ в точках $x = 0$ и $x = l$. Так как здесь концы струны жестко закреплены, то следует принять для всех t:

$$u(0, t) = 0, \; u(l, t) = 0. \tag{3}$$

Следовательно, стоящая перед нами задача может быть сформулирована так: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в частных производных, при условиях (2) и (3). Задача эта решается различными методами, при тех или иных ограничениях на $f(x)$ и $\psi(x)$. Мы здесь рассмотрим только один из них — метод Фурье, предполагая пока только, что эти функции удовлетворяют условиям разложимости их в ряд Фурье на сегменте $[0, l]$.

Будем вначале искать лишь частные решения u уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (3) и имеющие специальный вид: $U = u(x, t)$ есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от t:

$$U = X(x)\, T(t), \tag{4}$$

где $X(x)$ и $T(t)$ — функции, имеющие непрерывные производные второго порядка соответственно на $[0, l]$ и $[0, +\infty)$, причем функции $X(x)$ и $T(t)$ не равны тождественно нулю в своей области определения*). Допуская, что функция U из (4) есть решение для (1), и замечая, что $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)\,T(t)$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T''(t)\,X(x)$, мы придем к уравнению вида:

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t) \qquad (*)$$

относительно $X(x)$ и $T(t)$. Разделяя в (*) переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2\,T(t)}. \qquad (5)$$

Но равенство (5) есть тождество относительно x и t (для $0 \leqslant x \leqslant l$ и любого t), и потому, чтобы оно могло выполняться в то время, как его левая часть не зависит от t, а правая не зависит от x, его обе части не должны зависеть ни от t, ни от x, т. е. обе должны являться одним и тем же постоянным числом p:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = p;\quad \frac{1}{a^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = p, \qquad (**)$$

откуда имеем два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения:

$$X'' - pX = 0 \text{ и } T'' - a^2 pT = 0 \qquad (6)$$

(аргументы x и t в этой записи для краткости опущены).

При этом мы ищем только решение U, удовлетворяющее условиям (3), так что (см. (4)) должны выполняться еще и условия: $X(0)\cdot T(t) = 0$, $X(l)\cdot T(t) = 0$, сразу для всех t из $[0, +\infty)$. Тогда, поскольку по условию $T(t) \not\equiv 0$, то должно быть:

$$X(0) = 0 \text{ и } X(l) = 0. \qquad (7)$$

Составим характеристическое уравнение для первого из уравнений (6): $k^2 - p = 0$. Если $p > 0$, то общее решение этого уравнения будет:

$$X = C_1 e^{\sqrt{p}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{p}\,t}.$$

Условия (7) приводят к следующей системе уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{p}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{p}\,l} = 0, \end{cases}$$

откуда легко находим, что $C_1 = C_2 = 0$ и, значит, $X = 0$ для всех $x \in [0, l]$, а такое решение нас не интересует. Аналогично мы убедимся, что то же будет и при $p = 0$. Остается поэтому рассмотреть только случай $p < 0$.

---

*) Иначе $u(x, t)$ тождественно равно нулю, а такое очевидное решение для (1) нас интересовать не может.

Полагая теперь $p = -\lambda^2$ ($\lambda > 0$), мы найдем, что корни характеристического уравнения будут: $k = \pm\lambda i$, и потому общее решение первого из уравнений (6) получит вид: $X(x) = M\cos \lambda x + N\sin \lambda x$.

Теперь условия (7) приводят нас к соотношениям: $M = 0$, $N\sin \lambda l = 0$. Так как $X(x) \not\equiv 0$, то при $M = 0$, окажется $N \neq 0$, и потому $\sin \lambda l = 0$, откуда $\lambda l = n\pi$, $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Таким образом, обозначая соответствующее взятому n значение $X(x)$ через $X_n(x)$, а произвольное постоянное N — через N_n, мы получим:

$$X_n(x) = N_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{8}$$

Обратимся теперь ко второму из уравнений (6). Его характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - a^2 p = 0$. Как и выше, легко убедимся, что, отвергая тривиальное решение $T(t) \equiv 0$, мы должны считать здесь $p < 0$. Снова полагая $p = -\lambda^2$ ($\lambda > 0$), мы найдем корни характеристического уравнения как $k_{1,2} = \pm a\lambda i$ и общее решение рассматриваемого теперь уравнения $T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$ таково: $T(t) = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t$ (C и D — произвольные постоянные). Однако p для обоих уравнений (6) одно и то же, значит, и λ для них — одно и то же, и

$$T(t) = C\cos \frac{an\pi}{l} t + D\sin \frac{an\pi}{l} t. \tag{9}$$

Так как p в (**) может быть любым постоянным отрицательным числом, то λ может принимать любое из своих возможных значений, т. е. n здесь можно брать любым целым положительным числом (но тем же, что и в (8)). Установим, что произведение

$$U_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t),$$

где через $T_n(t)$ обозначена та из функций $T(t)$, которая соответствует какому-либо фиксированному n, действительно является решением для (1): так как функции $X_n(x)$ и $T_n(t)$ подобраны в соответствии с (6), то для них будут выполнены при одном и том же $p = -\lambda^2$ и равенства (**), а тогда для этих функций будет справедливо и равенство (5), а значит, и равенство (*), так что будет выполняться тождество:

$$\frac{\partial^2 U_n(x, t)}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_n(x,t)}{\partial t^2},$$

и найденная функция $U_n(x, t)$ — решение для (1), причем в силу того, что для $X_n(x)$ выполняются условия (7), для $U_n(x, t)$ будут выполняться граничные условия (3). Обозначая теперь произве-

дение N_nC через A_n, а N_nD — через B_n, мы придем к следующей форме частного решения для (1):

$$U_n(x,\ t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$), взятого пока без учета начальных условий (2).

Поскольку уравнение (1) однородно, то вместе с любыми его решениями $U_1, U_2, \ldots, U_k$ ему удовлетворяет и их сумма U, и потому решением для (1) будет при любом натуральном k и функция вида

$$U = \sum_{n=1}^{k} U_n(x,\ t) = \sum_{n=1}^{k}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (10)$$

(причем граничные условия по-прежнему будут выполнены). Однако начальные условия для U здесь, как легко видеть, будут выполняться лишь для очень узкого класса функций $f(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому класс функций U из (10) подлежит дальнейшему расширению.

Так как k здесь может быть как угодно большим, то это наводит на мысль рассмотреть вместо конечной суммы, входящей в (10), ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Если этот ряд для $0 \leqslant x \leqslant l$ и любого t сходится в некоторой функции $U(x, t)$ и допускает дважды последовательно проведенное дифференцирование по x и t, то, очевидно, функция $U(x, t)$ снова будет решением для (1). Если теперь в равенстве

$$U(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (11)$$

произвести (допуская его законным) почленное дифференцирование по t, то мы получим:

$$\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi a}{l}A_n \sin\frac{n\pi a}{l}t + \frac{n\pi a}{l}B_n \cos\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Имеем:

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \frac{\partial U(x,\ 0)}{\partial t} = \frac{\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Беря в расчет и начальные условия (2), мы должны потребовать еще:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \frac{l}{\pi a}\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Но именно по таким формулам разлагаются в ряд Фурье на $[0, l]$ функции $f(x)$ и $\frac{l}{\pi a}\psi(x)$ по одним синусам (§ 32), и, значит, в силу

существования и однозначности такого разложения для надлежащим образом подобранных функций $f(x)$ и $\psi(x)$ коэффициенты Фурье A_n и B_n могут быть найдены по формуле (4) (§ 32):

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (12)$$

$\left(nB_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{l}{\pi a}\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\right.$ откуда и следует записанное для B_n равенство).

Однако мы получили этот результат из не вполне строгих рассуждений, так как не указали, при каких ограничениях, наложенных на $f(x)$ и $\psi(x)$, ряд (11) будет допускать дважды почленное дифференцирование, как по x, так и по t, а также не обеспечили сходимость соответствующих рядов Фурье к $f(x)$ и $\psi(x)$. Можно доказать, что в этих целях достаточно было бы потребовать, чтобы на $[0, l]$ функция $\psi(x)$ имела бы производную, а $f(x)$ — еще и вторую производную и чтобы эти производные были кусочно-монотонны.

Пример. Найти закон движения $U(x, t)$ (в произвольный момент времени t) однородной струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, по данным начальным условиям:

$$U(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{4h}{3l}x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}l, \\ \frac{4h}{l}(l-x) & \text{при } \frac{3}{4}l < x \leqslant l, \end{cases} \qquad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = 0$$

(начальное отклонение имеет форму треугольника с вершинами $(0, 0)$, $\left(\frac{3}{4}l, h\right)$, $(l, 0)$).

Р е ш е н и е. Непосредственно очевидно, что функции $f(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют только что указанным ограничениям (наличие исключительного значения $x = \frac{3}{4}l$ несущественно). Находим A_n и B_n. Так как $\psi(x) = 0$, то $B_n = 0$ для всех n. Ищем A_n:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{3}{4}l} \frac{4h}{3l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{2}{l}\int_{\frac{3}{4}l}^{l} \frac{4h}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{8h}{l^2}\left\{\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{n\pi}\times\right.\right.$$

$$\times x\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{3n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]_0^{\frac{3}{4}l} + \left[-\frac{l^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l} -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]_{\frac{3}{4}l}^{l}\right\} = \frac{32h}{3n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{4}.$$

Теперь по (11) имеем: $U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32h}{3n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{4}\cos\frac{n\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Иван Михайлович Уваренков
Моисей Захарович Маллер

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том II

Редактор *С. В. Пазельский*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Л. Я. Медведев*
Корректор *Р. Б. Штутман*

Сдано в набор 17/XI 1975 г. Подписано к печати 24/V 1976 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага типогр. № 3. Печ л. 30,0 Уч.-изд. л 27,66 Тираж 37 тыс. экз. А-05943.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Заказ № 410

Цена 93 коп.